الگوریتم بهینهٔ تعیین توالی عملیات در مسئلهٔ یک ماشین با زودکرد و دیرکرد

مجید امین نیری* و قاسم مصلحی*

دانشکدهٔ مهندسی صنایع، دانشگاه امیرکبیر

دانشکدهٔ مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۷۷/۱۱/۱۷ - دریافت نسخهٔ نهایی: ۷۸/۱۱/۲۳)

چکیده – *مسئلهٔ تعیین توالی مجموعه ای از کارها با معیار کمینه سازی بیشینه های زودکرد ودیرکرد در یک ماشین مورد بررسی قرارگرفته است. این معیار می‌تواند منطبق بر سیستمهای تولیدی مختلفی از جمله JIT باشد. این معیار در حالتهای خاص بررسی شده و جواب بهینهٔ آنها با ترتیبهای ساده ارائه شده است. برای حالت کلی شرایط همسایگی موثری توسعه داده شده و مجموعهٔ غالب، برای جواب بهینه مشخص شده است. همچنین روش شاخه وکرانه برای این معیار به‌کارگرفته شده است. ارائهٔ حدود بالا و پایین قوی موجب شده‌که در روش شاخه وکرانه، بسیاری از مسائل در مدت زمانهای کوتاه به جواب بهینه برسند. ۷۲۰ مسئله در اندازه های کوچک، متوسط و بزرگ به صورت تصادفی تولید شده است. محدودهٔ این مسائل از ۵ کار تا ۱۰۰ کار بوده وکارایی الگوریتم پیشنهادی در آنها نشان داده شده است.*

An Optimum Algorithm for Single Machine with Early/Tardy Cost

M. Amin-Nayeri and G. Moslehi

Department of Industrial Engineering, Amir-kabir University of Technology

Department of Industrial Engineering, Isfahan University of Technology

ABSTRACT- *The problem of determining the sequence of a set of jobs with the objective function of minimizing the maximum earliness and tardiness in one machine is studied.*

Production systems like JIT are one of the many applications of the problem. This problem is studied in special cases and their optimal solutions are introduced with simple orders. In general, some effective conditions for neighboring jobs have been developed and the dominant set for the optimal solution is determined. Branch and Bound (BB) method is also used for this problem. The strong upper and lower limits are introduced in BB, resulting in optimal solutions to a lot of problems in short time periods. To show the effectiveness of the suggested solution methods, as many as 720 problems in different sizes, with 5 to 100 jobs, have been randomly generated and solved.

---

* - استادیار

فهرست علائم

C_j	زمان اتمام کار j (۱)	L_j	مدت زمان مغایرت اتمام و موعد تحویل کار j (۶)	T_j	مدت زمان دیرکرد کار j (۲)
d_j	موعد تحویل کار j (۱)	L_{min}	کمینهٔ مدت زمان مغایرت اتمام و موعد تحویل	T_{max}	بیشینهٔ دیرکرد (۴)
E_j	مدت زمان زودکرد کار j (۱)	n	تعداد کار (۱)	T_{maxmst}	بیشینهٔ دیرکرد ترتیب با MST (۱۱)
E_{max}	بیشینهٔ زودکرد (۳)	p_j	مدت زمان پردازش کار j (۸)	$UBET_{max}$	حد بالای کمینهٔ بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد (۱۱)
E_{maxedd}	بیشینه زودکرد با ترتیب EDD (۱۱)			$LBET_{max}$	حد پایین کمینه بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد (۱۲)
ET_{max}	مجموع بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد (۵)				

۱- مقدمه

زمانبندی[1] و تعیین توالی عملیات[2] یکی از مسایل مهم برنامه‌ریزی تولید بوده و کاربردهای زیادی در واحدهای تولیدی و حتی غیرتولیدی دارد. در بسیاری مواقع با برنامه ریزی مناسب ترتیب انجام کارها روی یک ماشین کلیدی و یا یک کارگاه مهم، تاثیرات زیادی در افزایش کارایی خواهد داشت. فرضیات مسئلهٔ برنامه‌ریزی عملیات روی یک ماشین در مدل پایه عبارت است، زمان آمادگی[3] برای تمام کارها یکسان بوده و هر کار دارای موعد تحویل[4] است. مدت زمان آماده سازی مستقل از ترتیب انجام کار روی یک ماشین است، لذا مدت زمان آماده سازی در زمان پردازش[5] منظور شده است. همچنین بیکاری عمدی[6] برای کار و ماشین مجاز نیست. این فرضیات در اکثر مقالات مرتبط با موضوع وجود دارد [۱ و ۲].

توابع هدف مختلفی برای مسئله‌ای با فرضیات بالا، در ادبیات موضوعی وجود دارد. این توابع هر کدام هدف خاصی را دنبال کرده و سعی در رسیدن به آن اهداف را دارند. بسیاری از این توابع هدف، در ارتباط با زودکرد و دیرکرد کارها، مطرح شده است. برای کمینه کردن بیشینهٔ مغایرت موعد تحویل و زمان ختم کار (L_{max}) و همچنین بیشینهٔ دیرکرد (T_{max}) از ترتیب EDD[7] استفاده می‌شود [۱ و ۲]. در بسیاری مواقع مجموع یا متوسط دیرکرد کلیه کارها به عنوان معیاری برای تعیین ترتیب کارها در نظر گرفته می‌شود. این معیار به نام ($\bar{T}$) بوده و برای کمینه کردن $\bar{T}$ در حالت کلی از روشهای بهینه سازی عمومی مثل روشهای شاخه و کرانه (B&B[8]) و برنامه‌ریزی پویا (DP[9]) استفاده می‌شود [۱ و ۳]. این روشها عمدتاً زمانبر بوده و برای مسائل با تعداد کار کم مناسب بوده و معمولاً در مسائل بزرگ کارایی ندارند. ایمانز[۴] با اثبات قضایایی، شرط لازم رابرای جواب بهینه $\bar{T}$ در مسئله یک ماشین ارائه کرد. در این شرط مقداری تقدم و تأخر کارها نسبت به یکدیگر در جواب بهینه به دست می‌آید. بیشتر محققان بعدی از نتایج قضایای ایمانز در الگوریتمهای خود استفاده کرده‌اند. سن و بورا[۵] با اثبات قضایایی براساس قضایای ایمانز مجموعه جوابهای قابل بررسی برای پیدا کردن جواب بهینه را کاهش می‌دهند. سن و بورا از روش B&B، جواب بهینه را برای مسائل تا ۳۰ کار به دست می‌آورند. هولزنبک و راسل[۶] روشی ابتکاری[10] برای کمینه کردن $\bar{T}$ بر اساس قضایای ایمانز ارائه دادند. این روش عمدتاً در مقالات بعدی مبنای مقایسه قرار گرفته است. روشی ابتکاری توسط پان‌واکر و همکاران[۷]، روشی مبتنی بر SA[11] توسط بن‌دایا و فوزان[۳] و روشی بر پایه TS[12] توسط اسلام و اکسیگلو[۸] برای کمینه کردن $\bar{T}$ ارائه شده که همگی روش خود را با روش هولزنبک و راسل[۶] مقایسه کرده‌اند.

بسیاری از محققان، توابع هدف چندگانه به دلیل انطباق بیشتر با خواسته های مدیریت در مسائل تعیین توالی و زمانبندی مورد توجه قرار داده‌اند. یکی از اهداف چندگانه، کمینه کردن مجموع (وزنی) زودکرد و دیرکرد کارهاست. این موضوع با سیستم تولید به موقع (JIT) منطبق است [۹ و ۱۰]. به دلیل اینکه در این تابع هدف دیرکرد دارای جریمه بوده و از دست دادن مشتریان را به دنبال دارد، همچنین زودکرد، باعث افزایش هزینهٔ موجودی و سرمایه‌گذاری می‌شود که هیچکدام مطلوب نیستند. این تابع در اشکال مختلف و با فرضیات مختلفی در مورد موعد تحویل کارها، مجاز بودن بیکاری عمدی، وزن دار بودن زودکرد و دیرکرد، توجه محققان را به خود جلب کرده است [۱۱-۱۳].

او و مورتون[۹] این مسئله را با فرض تفاوت بین هزینه زودکرد و دیرکرد برای اولین بار مطرح کرده‌اند. او و مورتون قضیه مؤثری در

ارتباط تقدم و تأخر کارها نسبت به یکدیگر اثبات کرده و بر اساس آن قواعد اولویت ابداع کرده‌اند و بر اساس این قواعد مسئله را به صورت ابتکاری حل کرده‌اند. جیمز و بیوکانن [۱۴] با استفاده از قضیه او و مورتون، یک روش TS برای حل آن ارائه کرده‌اند.

این تابع هدف برای اولین‌بار در بیش از یک ماشین و حالت Flow Shop توسط ذگردی و همکاران[۱۰] حل شد. ذگردی و همکاران با استفاده از روش SA، روشی ابتکاری برای کمینه کردن مجموع وزنی زودکرد و دیرکرد کارها اراده دادند.

ممکن است در نتایج حاصل از کمینه کردن مجموع (وزنی) زودکرد و دیرکرد، مقادیر بزرگ زودکرد و یا دیرکرد برای بعضی از کارها وجود داشته باشد. در این صورت بسیاری از مواقع، این مسئله، موجب اشکال در سیستم تولیدی خواهد شد.

برای مشخص شدن این مشکل، حالتی را درنظر بگیرید که کارهای خروجی ماشین به صورت بسته های متشکل از چندین قطعه از کارخانه خارج می‌شوند. اگر تمام کارهای یک بسته به موقع تولید شده ولی کاری دیرکرد داشته باشد، بقیه کارهای آن بسته باید منتظر بمانند. در نتیجه تولید به موقع آنها مزیتی نیست. در چنین وضعی، زودکرد کارها موجب اشغال فضا و افزایش موجودی می‌شود. در هر حال، در صورت وجود زودکرد و یا دیرکرد باید برای تمام کارها تقریباً یکسان باشد. به عبارتی اگر در بسته‌ای کاری زودکرد دارد باید بقیه کارهای آن بسته نیز زودکرد داشته باشند و اگر کاری دیرکرد داشته باشد، همه کارها دیرکرد داشته باشند، و در این صورت باید فاصله زمانی بین دیرکرد و زودکرد تقریباً صفر شود. این خواسته از طریق کمینه‌سازی بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد براورده شده و در این مقاله به آن پرداخته می‌شود.

از کاربرد های دیگر این تابع، تغذیه خط مونتاژ توسط یک ماشین است. بدین معنی که خط مونتاژ، کارها را در زمان مشخصی (موعد تحویل) نیاز دارد. اگر کاری زودکرد و یا دیرکرد زیاد داشته باشد موجب مصرف نشدن سایر کارها و اخلال در خط مونتاژ می‌شود. بنابراین هدف "کمینه‌سازی بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد" این مشکل را کاهش می‌دهد و سعی می‌کند که کارها زودکرد و دیرکرد نداشته باشند و در صورت وجود زودکرد و دیرکرد، این مقادیر برای کارها تقریباً یکسان بوده و زودکرد و دیرکرد بزرگ وجود نداشته باشد.

می‌توان ادعا کرد، کمینه‌سازی بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد با سیستم تولیدی JIT مطابقت دارد. چون مقدار این تابع در بهترین حالت برابر صفر است و مقدار آن در صورت وجود هرگونه زودکرد و دیرکرد از صفر بیشتر می‌شود. در این صورت تابع سعی می‌کند که مقادیر آن راکاهش دهد، و این از اهداف سیستم تولیدی JIT است. برای درک بهتر مطلب، لطفاً به مثال زیر توجه شود:

کار	۱	۲	۳	۴	۵
مدت زمان‌پردازش	۱۸	۱۶	۱۴	۱۱	۱۲
موعد تحویل	۴۰	۳۰	۴۰	۵۵	۲۵

جواب بهینهٔ کمینه مجموع زودکرد و دیرکرد مسئلهٔ بالا با توالی ۱-۴-۳-۲-۵ برابر ۵۰ است. مقدار بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد این توالی برابر ۴۴ است. یعنی فاصلهٔ زمانی بین مقادیر بیشترین زودکرد و بیشترین دیرکرد، برابر ۴۴ واحد زمانی است. در صورتی که کمینه بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد مسئلهٔ بالا با توالی ۴-۱-۳-۲-۵ برابر ۳۳ است یعنی حدود ۲۵٪ فاصله زمانی کاهش یافته است. مقدار مجموع زودکرد و دیرکرد این توالی برابر ۵۳ است.

در بخش دوم مقاله تابع کمینه سازی بیشینه های زودکرد و دیرکرد معرفی شده و حالتهای خاص و عمومی آن مورد بررسی قرار گرفته است. ارائهٔ الگوریتم بهینه برای حل مسئله در بخش سوم وجود دارد. در بخش چهارم مثالهای کاربردی، روش آزمون و حل مسائل به همراه نتایج محاسباتی وجود دارد و نتیجه‌گیری در بخش آخر آمده است.

۲- معرفی مسئلهٔ کمینه سازی بیشینه های زودکرد و دیرکرد

در مسئلهٔ یک ماشین مقادیر زودکرد و دیرکرد هر کار از معادله‌های زیر به دست می‌آیند.

$$E_j=\max(0 , d_j-C_j) \quad (j=1,2,...,n) \qquad (۱)$$

$$T_j=\max(0 , C_j-d_j) \quad (j=1,2,...,n) \qquad (۲)$$

مقادیر بیشینهٔ زودکرد و بیشینهٔ دیرکرد یک توالی از معادله‌های زیر به دست می‌آیند.

$$E_{max}=\max_{1\le j\le n}\{E_j\} \qquad (۳)$$

$$T_{max} = \max_{1\le j\le n} \{T_j\} \quad (۴)$$

مقدار تابع بیشینه های زودکرد و دیرکرد برابر است با:

$$ET_{max}=E_{max}+T_{max} \quad (۵)$$

$$ET_{max}= \max_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le n\\ k\# j}} (\max(0,-L_j)+\max(0,L_k)) \quad (۶)$$

هدف در این مقاله کمینه سازی ET_{max} است. این تابع هدف نامنظم[13] است. لذا خواص بسیاری که در مورد توابع هدف منظم وجود دارد و موجب سادگی مسئله می‌شود در مورد تابع ET_{max} وجود ندارد.

۲-۱- حالتهای خاص تابع ET_{max}

با توجه به فرضیات مجاز نبودن قطع عملیات و نداشتن بیکاری عمدی، تعداد حالتهای ممکن برنامه ها برابر !n است. بنابراین جواب بهینهٔ ET_{max} در بین این برنامه ها (برنامه های جایگشتی[14]) وجود دارد. لذا در بیان حالتهای خاص و قضایا از ذکر در بین برنامه‌های جایگشتی خودداری می‌شود. علامت "*" در بالای نمادها نشان دهندهٔ مقدار بهینهٔ آنهاست.

در این قسمت حالتهای خاص تابع که به مسائل دیگر تبدیل می‌شود، بیان شده است.

حالت ۱- اگر تمام کارها دیرکرد داشته باشند، کمینه کردن ET_{max} معادل با کمینه کردن T_{max} است.

یاداوری - در مسئلهٔ یک ماشین، کمینهٔ T_{max} از ترتیب EDD به دست می‌آید [۱ و ۲].

حالت ۲- اگر تمام کارها زودکرد داشته باشند، کمینه کردن ET_{max} معادل با کمینه کردن E_{max} است.

یاداوری - در مسئلهٔ یک ماشین، کمینه E_{max} از ترتیب MST[15] به دست می‌آید [۱ و ۲].

حالت ۳- اگر تمام کارها دیرکرد داشته و دارای موعد تحویل یکسان باشند، کمینه‌سازی ET_{max} معادل با کمینه‌سازی C_{max} است.

یاداوری ۱- در مسئله یک ماشین، مقدار C_{max} برای تمام ترتیبهای جایگشتی، یکسان است.

یاداوری ۲- در مسئلهٔ Flow Shop، با شرایط حالت ۳ می‌توان روشهای کمینه کردن C_{max} را برای کمینه کردن ET_{max}، به کار گرفت.

حالت ۴- اگر تمام کارها زودکرد داشته و دارای موعد تحویل یکسان باشند، کمینه‌سازی ET_{max} معادل با بیشینه‌سازی L_{min} است.

یاداوری - در مسئلهٔ یک ماشین، بیشینهٔ L_{min} از ترتیب MST به دست می‌آید. و در صورت مساوی بودن موعدهای تحویل، ترتیب MST و LPT[16]، یکسان هستند [۱ و ۲].

به دنبال شرط همسایگی بیان می‌شود.

۲-۲- شرط همسایگی

برای بیان قضایای شرط همسایگی، کلیه کارهای یک توالی براساس موعد تحویل به سه مجموعه تقسیم می‌شوند. در این معادله‌ها d_{earl} برابر زودترین موعد تحویل قطعات و d_{late} برابر دیرترین موعد تحویل قطعات است. مجموعهٔ A شامل کلیه کارهایی است که زمان اتمام آنها از d_{earl} دیرتر نیست. مجموعهٔ C شامل کلیه کارهایی است که زمان شروع آنها از d_{late} زودتر نیست. مجموعهٔ B شامل بقیه کارهاست. شکل (۱) این سه مجموعه را نشان می‌دهد.

با توجه به شکل (۱) مجموعه کارها به سه مجموعهٔ A، B و C به صورت زیر تقسیم می‌شوند.

$$A=\{ j|C_j \le d_{earl} \} \quad (۷)$$

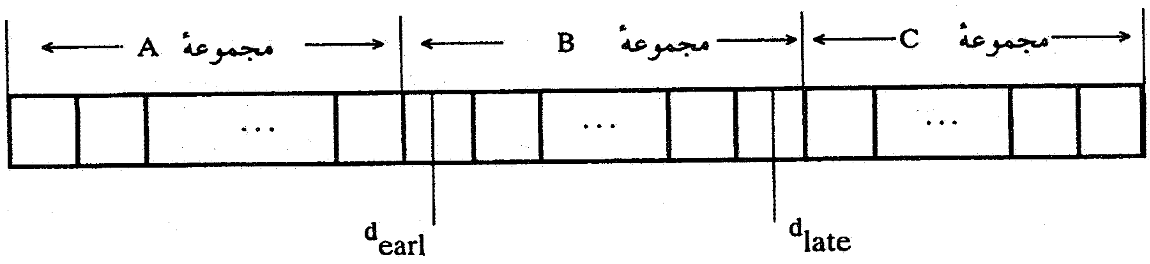
$$B=\{ j|C_j > d_{earl} \text{ و } C_j -p_j<d_{late} \} \quad (۸)$$

$$C=\{ j|C_j -p_j \ge d_{late} \} \quad (۹)$$

بدیهی است که مجموعه تمام کارهابرابر AUBUC است.

قضیه ۱- در مسئلهٔ یک ماشین برای کمینه کردن ET_{max}، یک ترتیب بهینه وجود دارد که در آن ترتیب کارهای مجموعهٔ A، به صورت MST مرتب شده باشند.

اثبات - اولاً کارهای عضو مجموعهٔ A، هیچکدام تأخیر ندارند. ثانیاً هرگونه جابه‌جایی در ترتیب کارهای مجموعهٔ A، تأثیری بر روی زمان اتمام کارهای عضو مجموعه‌های B و C ندارد. ثالثاً براساس حالت (۲)، اگر کارهای عضو مجموعهٔ A به صورت MST مرتب شوند، مقدار بیشینهٔ زودکرد، کارهای عضو مجموعهٔ A را بیشتر نمی‌کند. پس اگر کارهای عضو مجموعهٔ A، به صورت MST مرتب شوند، مقدار بیشینه زودکرد بیشتر نمی‌شود. بنابراین، اگر در



شکل ۱- نمایش یک توالی براساس سه مجموعهٔ A، B و C

جواب بهینه، کارهای عضو مجموعهٔ A به صورت MST نباشند، می‌توان آنها را به صورت MST مرتب کرد.

نتیجه - از این قضیه به عنوان یک اصل غلبه می‌توان استفاده کرد و فقط ترتیبهایی را بررسی کرد که کارهای عضو مجموعهٔ A ، در آن ، به صورت MST مرتب شده باشند.

قضیه ۲- در مسئلهٔ یک ماشین برای کمینه کردن ET_{max} ، یک ترتیب بهینه وجود دارد که در آن ترتیب، کارهای عضو مجموعه C، به صورت EDD مرتب شده باشند.

اثبات - اولاً کارهای عضو مجموعهٔ C ، هیچکدام زودکرد ندارند. ثانیاً هرگونه جابه‌جایی در ترتیب کارهای عضو مجموعهٔ C ، تأثیری بر روی زمان اتمام کارهای عضو مجموعه‌های A و B ندارد. ثانیاً بر اساس حالت (۱)، اگر کارهای عضو مجموعهٔ C به صورت EDD مرتب شوند، مقدار بیشینهٔ دیرکرد، کارهای عضو مجموعهٔ C را بیشتر نمی‌کند. پس اگر کارهای عضو مجموعهٔ C ، به صورت EDD مرتب شوند، مقدار بیشینهٔ دیرکرد، بیشتر نمی‌شود. بنابراین اگر در جواب بهینه، کارهای عضو مجموعهٔ C به صورت EDD مرتب نباشند، می‌توان آن را به صورت EDD مرتب کرد.

نتیجه - از این قضیه به عنوان یک اصل غلبه می‌توان استفاده کرد و فقط ترتیبهایی را بررسی کرد که در آنها کارهای عضو مجموعهٔ C به صورت EDD مرتب شده باشند.

با توجه به تعاریف مجموعه‌های A ، B ، C و معادلهٔ (۵) مقدار ET_{max} برابر خواهد شد با

$$ET_{max} = \max(\max_{j\in A}\{E_j\}, \max_{j\in B}\{E_j\}) + \max(\max_{j\in B}\{T_j\}, \max_{j\in C}\{T_j\}) \qquad (۱۰)$$

به دنبال نحوهٔ به دست آوردن حدود بالا و پایین برای تابع هدف بیان خواهد شد.

۲-۳- حدود بالا و پایین برای مقدار تابع هدف

در این قسمت قضیه ای برای به دست آوردن یک جواب امکانپذیر به عنوان حد بالا برای روش شاخه و کرانه ارائه می‌شود. همچنین قضیه ای برای محاسبه حد پایین در روش شاخه و کرانه بیان می‌شود.

قضیه ۳- در مسئلهٔ یک ماشین، یک حد بالا ، $UBET_{max}$ ، برای کمینهٔ ET_{max} از معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$UBET_{max} = \min(E_{maxedd} + T^*_{max}, E^*_{max} + T_{maxmst}) \qquad (۱۱)$$

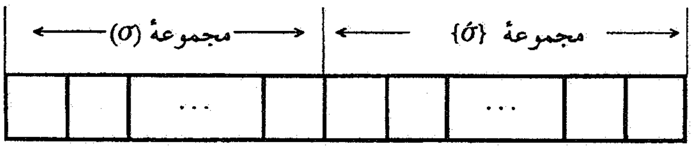
اثبات - اولاً مقدار تابع ET_{max} در ترتیب EDD برابر $E_{maxedd}+T^*_{max}$ است. بنابراین قسمت اول در سمت راست معادلهٔ (۱۱) مربوط به ترتیب EDD بوده و یک جواب امکانپذیر است. ثانیاً مقدار تابع ET_{max} در ترتیب MST برابر $E^*_{max}+T_{maxmst}$ است. بنابراین قسمت دوم در سمت راست معادلهٔ (۱۱) مربوط به ترتیب MST بوده و یک جواب امکانپذیر است. بنابراین، کمینهٔ مقدار ET_{max} برای دو ترتیب EDD و MST یک جواب امکانپذیر است و این کمینه یک حد بالاست.

قضیه ۴- در مسئلهٔ یک ماشین و n کار، یک حد پایین، $LBET_{max}$، برای کمینه ET_{max} با مشخص بودن توالی جزیی[17] بعضی از کارها، به صورت زیر است:

$$LBET_{max}((\sigma)+\{\sigma'\}) = \max(E_{max}(\sigma)+T_{max}(\sigma), E_{max\,mst}\{\sigma'\}+T_{max}(\sigma), E_{max}(\sigma)+T_{max\,edd}\{\sigma'\}) \qquad (۱۲)$$

که در آن :

$(\sigma)=\{\, i \mid$ که در آن کارهای i ، ترتیبشان مشخص شده است. $\}$



شکل ۲- موقعیت توالی جزئی (σ) و مجموعهٔ $\{\sigma'\}$

$\{\sigma'\}=\{i\}$ | که در آن کارهای i ، ترتیبشان مشخص نیست.}

کارهای عضو مجموعهٔ (σ) قبل از کارهای عضو $\{\acute{\sigma}\}$ قرار دارد. تعداد عناصر هر کدام از این دو مجموعه کوچکتر یا مساوی تعداد کل کارهاست. به طوری که $\{\acute{\sigma}\}$ + (σ) برابر تمام قطعات است.

$E_{max}(\sigma)$: بیشینهٔ زودکرد کارهای عضو (σ)

$T_{max}(\sigma)$: بیشینهٔ دیرکرد کارهای عضو (σ)

$E_{maxmst}\{\acute{\sigma}\}$: بیشینهٔ زودکرد کارهای عضو $\{\acute{\sigma}\}$ که بعد از کارهای عضو (σ) بوده و ترتیب آن MST باشد.

$T_{maxedd}\{\acute{\sigma}\}$: بیشینهٔ دیرکرد کارهای عضو $\{\acute{\sigma}\}$ که بعد از کارهای عضو (σ) بوده و ترتیب آن EDD باشد.

اثبات - با توجه به موقعیت مجموعه‌های کارهای عضو (σ) و $\{\acute{\sigma}\}$ که در شکل (۲) نمایش داده شده است

مقدار ET^*_{max} از مقدار کمینهٔ ET_{max} مربوط به مجموعه کارهای (σ) کوچکتر نیست. یعنی

$$ET^*_{max} \geq E_{max}(\sigma) + T_{max}(\sigma) \qquad (۱۳)$$

مقدار ET^*_{max} از مقدار بیشینهٔ زودکرد در مجموعه کارهای عضو (σ) به علاوهٔ بیشینهٔ دیرکرد مجموعه کارهای عضو $\{\sigma'\}$ که از ترتیب EDD به دست می‌آید، کوچکتر نیست. یعنی :

$$ET^*_{max} \geq E_{max}(\sigma) + T_{maxedd}\{\sigma'\} \qquad (۱۴)$$

همچنین مقدار ET^*_{max} از مقدار بیشینهٔ دیرکرددر مجموعهٔ کارهای عضو (σ) به علاوهٔ بیشینهٔ زودکرد مجموعه کارهای عضو $\{\acute{\sigma}\}$ که از ترتیب MST به دست می‌آید، کوچکتر نیست یعنی:

$$ET^*_{max} \geq E_{max}(\sigma) + T_{maxmst}\{\acute{\sigma}\} \qquad (۱۵)$$

از مقایسهٔ معادله‌های (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$ET^*_{max} \geq \max(E_{max}(\sigma)+T_{max}(\sigma), E_{max\,mst}\{\sigma'\}+T_{max}(\sigma), E_{max}(\sigma)+T_{max\,edd}\{\sigma'\}) \qquad (۱۶)$$

بنابراین می‌توان گفت که مقدار سمت راست معادلهٔ (۱۶) یک حد پایین برای ET^*_{max} در مسئلهٔ یک ماشین است. در بخش بعدی الگوریتم بهینه برای کمینه سازی ET_{max} بیان می‌شود.

۳- الگوریتم بهینه برای کمینه سازی ET_{max}

با ترکیب قضایای ارائه شده و روش شاخه و کرانه ، الگوریتمی برای کمینه سازی بیشینه های زودکرد و دیرکرد (ET_{max}) در مسئلهٔ یک ماشین ارائه شده است. شکل (۳) نشان دهندهٔ نمودار جریانی این الگوریتم است. مراحل الگوریتم به اختصار عبارت‌اند از:

مرحلهٔ ۱- ابتدا کلیه کارها در مجموعهٔ U فرض می‌شود. کارهای عضو مجموعه U بر اساس ترتیب EDD و MST مرتب شده و با استفاده از قضیه ۳، یک حد بالا (UB) برای مسئله محاسبه می‌شود.

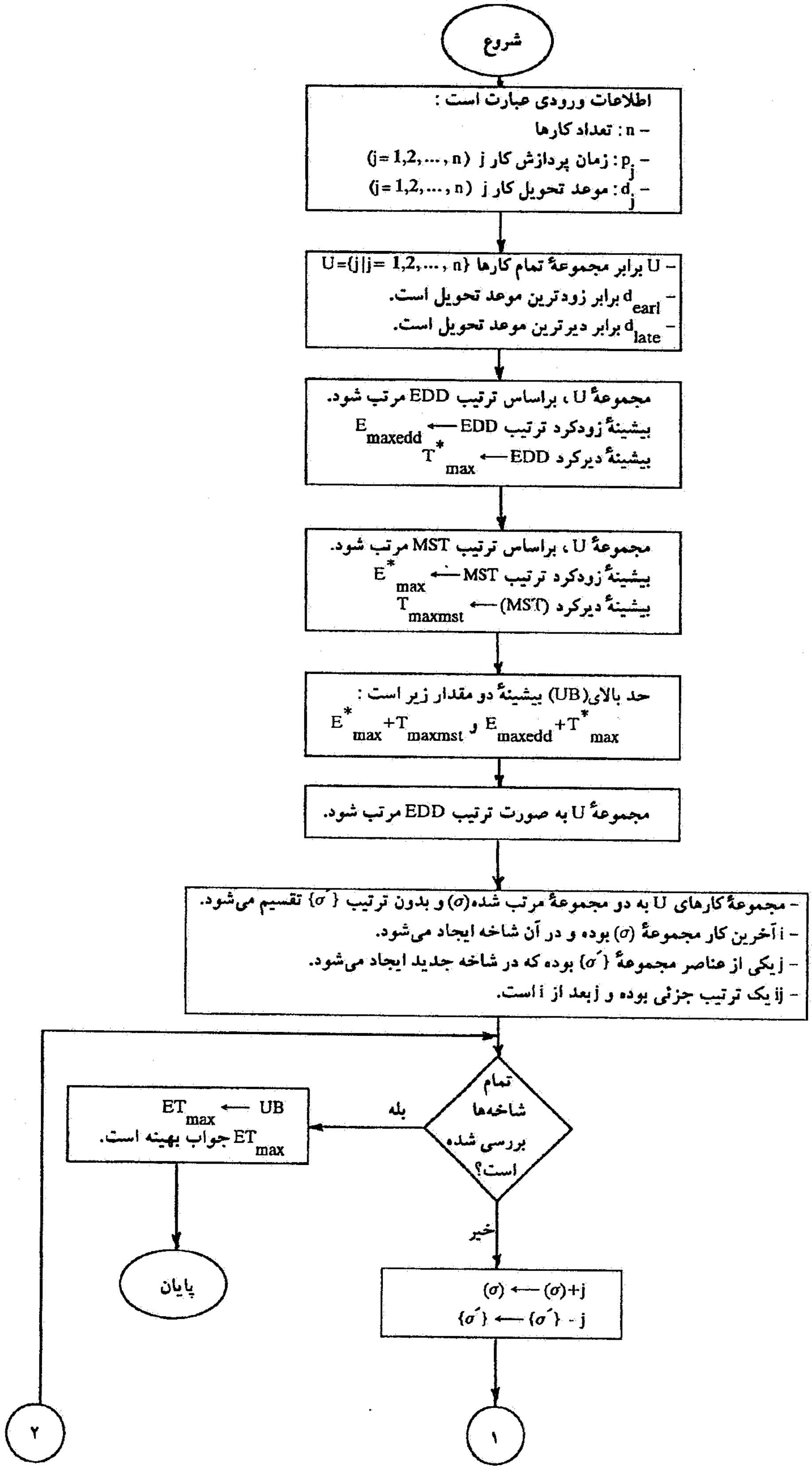
مرحله ۲- در این مرحله از روش شاخه و کرانه استفاده می‌شود. این روش با ترتیب اولیه EDD شروع می‌کند. این ترتیب موجب افزایش زیاد در سرعت الگوریتم می‌شود. در این مرحله قضایای (۵) و (۶) به کار می‌روند. در شاخه کردن ، کارهای مربوط به ترتیبهای جزیی که قبل از زودترین موعد تحویل (d_{earl}) به اتمام می‌رسند، باید شرایط قضیهٔ (۱) را داشته باشند. و به صورت ترتیب MST مرتب شده باشند. همچنین کارهایی که در ترتیبهای جزیی همزمان و یا بعد از دیرترین موعد تحویل (d_{late}) شروع می‌شوند، باید در شرایط قضیه (۲) قرار گرفته و دارای ترتیب EDD باشند. بنابراین بسیاری از شاخه‌ها، چون در شرایط قضایای (۱) و (۲) صدق نمی‌کنند حذف خواهند شد.

مرحلهٔ ۳- اگر شاخه‌ای هنوز حذف نشده باشد، حد پایین مسئله براساس قضیه (۴) محاسبه می‌شود. این محاسبه احتمالاً موجب حذف شاخه شده و باید شاخه‌ای دیگر در مرحلهٔ مناسب ایجاد شود.

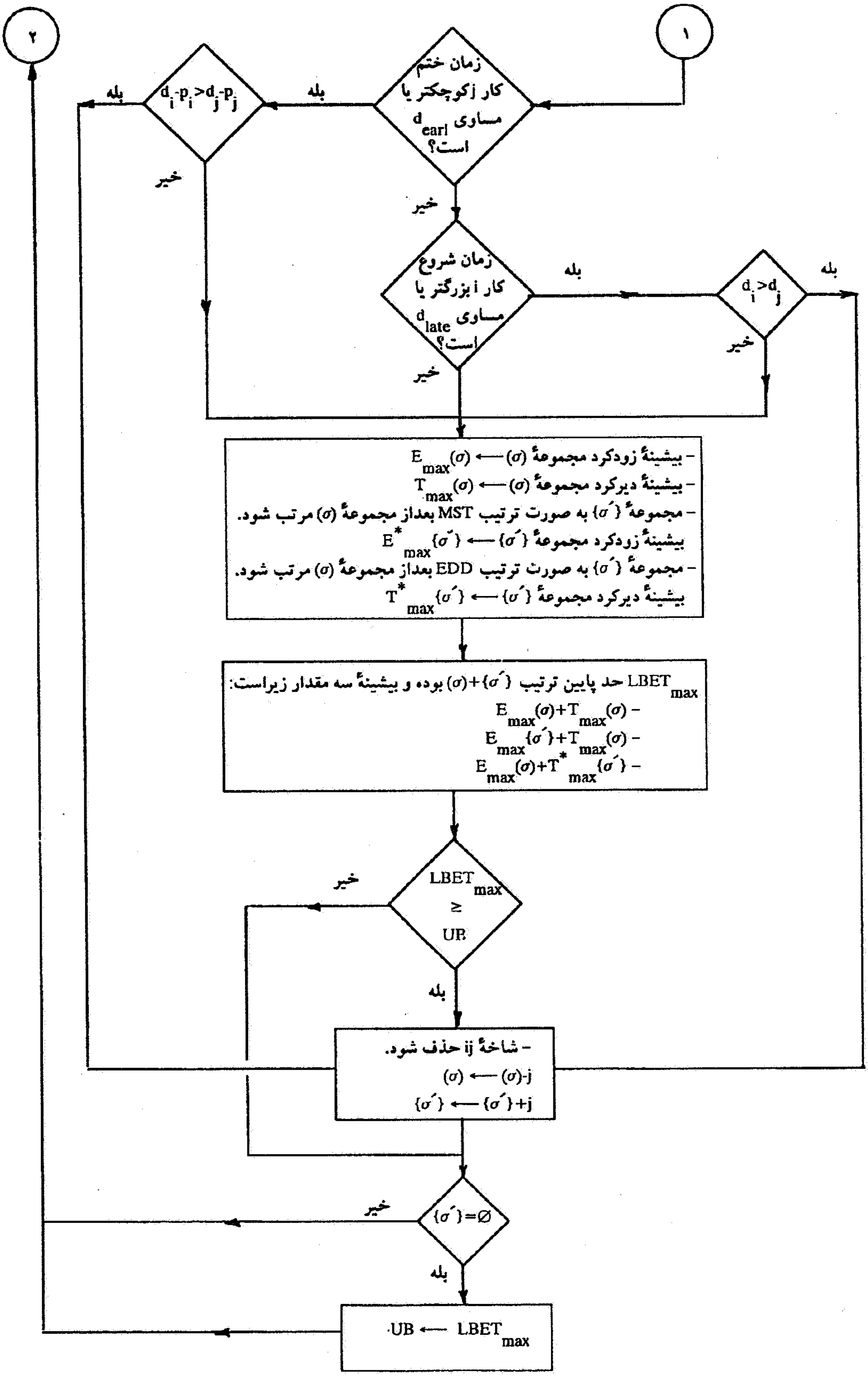
مرحلهٔ ۴- اگر یک جواب، شامل تمام کارها به دست آمده باشد، مقدار بیشینه های زودکرد و دیرکرد آن محاسبه می‌شود. این مقدار با حد بالا مقایسه شده و در صورتی که از حد بالا کمتر باشد ، جایگزین حد بالا می‌شود.

مرحلهٔ ۵- اگر شاخه‌ها بررسی نشده باشند، مجدداً شاخه‌ای ایجاد شده و مراحل روش شاخه و کرانه برای آن شاخه اجرا می‌شود.

جزئیات این مراحل در شکل (۳) همراه با ارائهٔ نمودار جریانی الگوریتم آورده شده است. در بخش بعد مثالهایی برای کاربرد آنها به عنوان مثال عملی برای الگوریتم پیشنهادی طرح، آزمون و حل خواهند شد.



شکل ۳- نمودار جریانی الگوریتم حل مسئلهٔ یک ماشین و n کار


۱
۲
زمان ختم کار زکوچکتر یا مساوی d_{earl} است؟
بله
$d_i-p_i>d_j-p_j$
بله
خیر
خیر
زمان شروع کار i بزرگتر یا مساوی d_{late} است؟
بله
$d_i>d_j$
بله
خیر
خیر
- بیشینهٔ زودکرد مجموعهٔ $(\sigma) \longleftarrow E_{max}(\sigma)$
- بیشینهٔ دیرکرد مجموعهٔ $(\sigma) \longleftarrow T_{max}(\sigma)$
- مجموعهٔ $\{\sigma'\}$ به صورت ترتیب MST بعداز مجموعهٔ (σ) مرتب شود.
بیشینهٔ زودکرد مجموعهٔ $\{\sigma'\} \longleftarrow E^*_{max}\{\sigma'\}$
- مجموعهٔ $\{\sigma'\}$ به صورت ترتیب EDD بعداز مجموعهٔ (σ) مرتب شود.
بیشینهٔ دیرکرد مجموعهٔ $\{\sigma'\} \longleftarrow T^*_{max}\{\sigma'\}$
$LBET_{max}$ حد پایین ترتیب $(\sigma)+\{\sigma'\}$ بوده و بیشینهٔ سه مقدار زیراست:
- $E_{max}(\sigma)+T_{max}(\sigma)$
- $E_{max}\{\sigma'\}+T_{max}(\sigma)$
- $E_{max}(\sigma)+T^*_{max}\{\sigma'\}$
$LBET_{max} \geq UB$
خیر
بله
- شاخهٔ ij حذف شود.
$(\sigma)-j \longrightarrow (\sigma)$
$\{\sigma'\}+j \longrightarrow \{\sigma'\}$
$\{\sigma'\}=\varnothing$
خیر
بله
$LBET_{max} \longrightarrow UB$

ادامهٔ شکل (۳)

۴- مثالهای کاربردی

برای نشان دادن کارایی الگوریتم کمینه‌سازی بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد در مسئلهٔ یک ماشین، لازم است مثالهایی آورده شود. ابتدا مسائل مناسب طراحی شده سپس اقدام به حل آنها خواهد شد.

۴-۱- طراحی مثال

محققان زیادی در زمینهٔ زودکرد و دیرکرد کارها به تحقیق پرداخته‌اند. ایشان برای تولید مسائل از نمونه‌های تصادفی استفاده کرده‌اند. این محققان دو عامل مهم را در تولید مسائل درنظر گرفته‌اند. عامل اول به نام عامل دیرکرد بوده و با τ نمایش داده می‌شود. این عامل متوسط موعد تحویل کارها را نسبت به مجموع زمانهای پردازش مشخص می‌کند. او و مورتون [۹] ، ذگردی [۱۰]، کیم و یانو[۱۵] ، یانو و کیم [۱۱] و جیمز و بیوکانن [۱۴] از محققانی بوده‌اند که این عامل و عامل دیگر را درنظرگرفته و برای τ معادلهٔ زیر را در نظر گرفته‌اند.

$$\tau=1-\frac{\bar{d}}{n\bar{p}}$$

که در آن $\bar{d}$ متوسط موعد تحویل ، $\bar{p}$ متوسط زمانهای پردازش و n تعداد کارهاست. در معادلهٔ بالا مقدار زمانهای پردازش و مقدار τ مشخص شده و مقدار $\bar{d}$ به دست آورده می‌شود. عامل دوم، عامل دامنهٔ موعد تحویل است. این عامل توسط محققان اشاره شده به طور مشابه به کار گرفته شده است. زمانهای پردازش مطابق ذگردی [۱۰] از توزیع یکنواخت در دامنه [۲۵ و ۵] استفاده شده است. با استفاده از معادلهٔ τ و مشخص بودن مقدار آن، متوسط موعد تحویل ($\bar{d}$) به دست می‌آید. سپس با استفاده از یک توزیع یکنواخت موعد تحویل قطعات مشخص می‌شود. توزیع یکنواخت موعد تحویل قطعات در فاصله [$\bar{d}(1+\frac{R}{2})$ و $\bar{d}(1-\frac{R}{2})$] است. که در آن R دامنه موعد تحویل است.

اوومورتون [۹] و ذگردی [۱۰] مقدار عامل دیرکرد ، τ، را برابر ۰/۲ و ۰/۶ و مقدار عامل دامنهٔ موعد تحویل ، R، را برابر ۰/۶ و ۱/۶ فرض کرده‌اند. این اعداد تقریباً در تحقیقات استاندارد شده است. محققان از این اعداد برای تولید مسائل تصادفی استفاده می‌کنند. به دنبال نحوهٔ روش آزمون مثالهای ایجاد شده بیان می‌شود.

۴-۲- طراحی روش آزمون

از ترکیب دو عامل دیرکرد و دامنهٔ موعد تحویل قطعات، چهار دسته مسئله ایجاد می‌شود. دستهٔ اول با τ=0.2 و R=1.6، دستهٔ دوم با τ=0.2 و R=0.6 ، دستهٔ سوم با τ=0.6 و R=1.6 و دستهٔ چهارم با τ=0.6 و R=0.6 هستند. اندازهٔ مثالها به نحوی طراحی شده‌اند که متنوع بوده و اندازه‌های کوچک، متوسط و بزرگ در آن وجود دارد. در هر دسته، مسائلی با اندازه‌های ۵، ۷، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۴۰، ۶۰ و ۱۰۰ کار درنظر گرفته شده است. تعداد ۲۰ مسئله از هر اندازه در هر دسته تولید و حل شده است. بنابراین در هر دسته، ۱۸۰ مسئله (۱۸۰=۹×۲۰) و برای تمام دسته‌ها، ۷۲۰ مسئله (۷۲۰=۱۸۰×۴) تولید شده است. این مسائل با رایانهٔ شخصی پنتیوم ۱۰۰ حل شده است. به دنبال حل مثالها و نتایج محاسباتی ارائه خواهد شد.

۴-۳- حل مسایل و نتایج محاسباتی

جدول (۱) نتیجهٔ حل مسائل را در دسته سوم با τ=0.2 و R=1.6 برای ۱۸۰ مسئله و در ۹ اندازه نشان می‌دهد. ستون "تعداد کار"، بیانگر اندازهٔ مسئله است. ستون "حد بالا" از قضیه (۳) به دست می‌آید. یک جواب امکانپذیر برای هر مسئله همان عدد مربوط به این ستون است. مقدار کمینهٔ بیشینهٔ زودکرد و دیرکرد در ستون "کمینه ET_{max}" وجود دارد. در ستون "حالت جواب" یکی از عبارات PBB و BES وجود دارد. عبارت PBB بیان می‌دارد که کل مسئله با استفاده از روش شاخه و کرانه حل شده است. سپس جواب بهینه به دست آمده است. با توجه به برنامه ای که نوشته شده است، اگر اجرای الگوریتم از زمان 180 sec تجاوز کند، الگوریتم قطع شده و بهترین جواب تا آن مرحله ارائه می‌شود. در این حالت عبارت BES در ستون "حالت جواب" نوشته شده است. در جدول (۱) فقط یک عبارت BES وجود دارد، پس جواب بهینه در تمام مسائل برای τ=0.6 و R=1.6 به جز یک مورد به دست آمده است.

زمان اجرای هر مسئله به ثانیه در ستون "زمان اجرا" وجود دارد. این زمان برای مسائل جدول (۱) بسیار کم بوده و بزرگترین زمان برابر 13.95 sec برای مسئلهٔ ۱۰۰ کار است. زمان اجرای بسیاری از مسائل ، برابر صفر است. بنابراین الگوریتم ارائه شده در این دسته از مسائل به خوبی عمل کرده است.

جدول ۱- نتایج حل مسائل در دستهٔ ۳ (0.6=τ و R=1.6)

شماره مسئله	تعداد کار	حد بالا	کمینه ET_{max}	زمان اجرا (ثانیه)	حالت جواب
۱	۵	۴۱	۴۱	۰/۰۰	PBB
۲	۵	۳۷	۳۷	۰/۰۰	PBB
۳	۵	۲۲	۲۲	۰/۰۰	PBB
۴	۵	۳۶	۳۶	۰/۰۰	PBB
۵	۵	۳۷	۳۷	۰/۰۰	PBB
۶	۵	۲۶	۲۶	۰/۰۰	PBB
۷	۵	۲۹	۲۹	۰/۰۰	PBB
۸	۵	۳۲	۳۲	۰/۰۰	PBB
۹	۵	۳۲	۳۲	۰/۰۰	PBB
۱۰	۵	۲۳	۲۳	۰/۰۰	PBB
۱۱	۵	۲۵	۲۵	۰/۰۰	PBB
۱۲	۵	۴۹	۴۹	۰/۰۰	PBB
۱۳	۵	۳۰	۳۰	۰/۰۰	PBB
۱۴	۵	۴۸	۴۸	۰/۰۰	PBB
۱۵	۵	۲۹	۲۹	۰/۰۰	PBB
۱۶	۵	۲۴	۲۴	۰/۰۰	PBB
۱۷	۵	۴۸	۴۸	۰/۰۰	PBB
۱۸	۵	۱۸	۱۷	۰/۰۰	PBB
۱۹	۵	۳۳	۳۳	۰/۰۰	PBB
۲۰	۵	۴۴	۴۴	۰/۰۰	PBB
۲۱	۷	۵۳	۵۳	۰/۰۰	PBB
۲۲	۷	۵۱	۵۱	۰/۰۰	PBB
۲۳	۷	۳۲	۳۲	۰/۰۰	PBB
۲۴	۷	۲۸	۲۸	۰/۰۰	PBB
۲۵	۷	۵۳	۵۳	۰/۰۰	PBB
۲۶	۷	۴۹	۴۹	۰/۰۰	PBB
۲۷	۷	۴۰	۴۰	۰/۰۰	PBB
۲۸	۷	۳۵	۳۵	۰/۰۰	PBB
۲۹	۷	۶۲	۵۸	۰/۰۰	PBB
۳۰	۷	۵۶	۵۶	۰/۰۰	PBB
۳۱	۷	۴۸	۴۸	۰/۰۰	PBB
۳۲	۷	۴۴	۴۱	۰/۰۰	PBB
۳۳	۷	۵۲	۵۲	۰/۰۰	PBB
۳۴	۷	۳۴	۳۴	۰/۰۰	PBB
۳۵	۷	۳۱	۳۱	۰/۰۰	PBB
۳۶	۷	۳۰	۳۰	۰/۰۰	PBB
۳۷	۷	۴۲	۴۲	۰/۰۰	PBB
۳۸	۷	۵۱	۵۱	۰/۰۰	PBB
۳۹	۷	۲۹	۲۹	۰/۰۰	PBB
۴۰	۷	۴۱	۴۱	۰/۰۰	PBB
۴۱	۱۲	۸۱	۸۱	۰/۰۰	PBB
۴۲	۱۲	۵۹	۵۹	۰/۰۰	PBB
۴۳	۱۲	۶۴	۶۴	۰/۰۰	PBB
۴۴	۱۲	۹۲	۹۲	۰/۰۰	PBB
۴۵	۱۲	۶۹	۶۸	۰/۰۰	PBB

ادامهٔ جدول (۱)

شماره مسئله	تعداد کار	حد بالا	کمینه ET_{max}	زمان اجرا (ثانیه)	حالت جواب
۴۶	۱۲	۹۱	۹۱	۰/۰۰	PBB
۴۷	۱۲	۶۴	۶۴	۰/۰۰	PBB
۴۸	۱۲	۶۱	۵۶	۰/۰۰	PBB
۴۹	۱۲	۶۰	۶۰	۰/۰۰	PBB
۵۰	۱۲	۱۱۶	۱۱۶	۰/۰۰	PBB
۵۱	۱۲	۶۸	۶۸	۰/۰۰	PBB
۵۲	۱۲	۶۶	۶۶	۰/۰۰	PBB
۵۳	۱۲	۷۳	۷۳	۰/۰۰	PBB
۵۴	۱۲	۸۴	۸۴	۰/۰۰	PBB
۵۵	۱۲	۸۶	۸۶	۰/۰۰	PBB
۵۶	۱۲	۷۹	۷۹	۰/۰۰	PBB
۵۷	۱۲	۶۶	۶۴	۰/۰۶	PBB
۵۸	۱۲	۹۱	۹۱	۰/۰۰	PBB
۵۹	۱۲	۸۶	۸۶	۰/۰۰	PBB
۶۰	۱۲	۶۵	۶۵	۰/۰۰	PBB
۶۱	۱۵	۶۲	۶۰	۰/۰۰	PBB
۶۲	۱۵	۱۳۰	۱۳۰	۰/۰۰	PBB
۶۳	۱۵	۸۲	۸۲	۰/۰۰	PBB
۶۴	۱۵	۹۴	۹۴	۰/۰۰	PBB
۶۵	۱۵	۶۲	۶۲	۰/۰۰	PBB
۶۶	۱۵	۱۰۷	۱۰۷	۰/۰۰	PBB
۶۷	۱۵	۷۲	۷۲	۰/۰۰	PBB
۶۸	۱۵	۱۰۹	۱۰۹	۰/۰۰	PBB
۶۹	۱۵	۱۰۵	۱۰۵	۰/۰۰	PBB
۷۰	۱۵	۸۷	۸۷	۰/۰۰	PBB
۷۱	۱۵	۸۹	۸۹	۰/۰۰	PBB
۷۲	۱۵	۶۲	۶۲	۰/۰۰	PBB
۷۳	۱۵	۱۰۶	۱۰۶	۰/۰۰	PBB
۷۴	۱۵	۸۲	۷۹	۰/۰۰	PBB
۷۵	۱۵	۸۵	۸۵	۰/۰۰	PBB
۷۶	۱۵	۸۶	۸۶	۰/۰۰	PBB
۷۷	۱۵	۶۱	۶۱	۰/۰۰	PBB
۷۸	۱۵	۸۱	۸۱	۰/۰۰	PBB
۷۹	۱۵	۱۳۰	۱۲۸	۰/۰۰	PBB
۸۰	۱۵	۹۷	۹۴	۰/۰۶	PBB
۸۱	۲۰	۹۱	۹۱	۰/۰۰	PBB
۸۲	۲۰	۱۱۳	۱۱۳	۰/۰۰	PBB
۸۳	۲۰	۱۱۶	۱۱۶	۰/۰۵	PBB
۸۴	۲۰	۱۱۸	۱۱۸	۰/۰۰	PBB
۸۵	۲۰	۱۲۹	۱۲۹	۰/۰۰	PBB
۸۶	۲۰	۱۶۲	۱۶۲	۰/۰۰	PBB
۸۷	۲۰	۹۹	۹۹	۰/۰۰	PBB
۸۸	۲۰	۸۲	۸۲	۰/۰۰	PBB
۸۹	۲۰	۱۴۳	۱۴۳	۰/۰۶	PBB
۹۰	۲۰	۱۰۳	۱۰۳	۰/۰۰	PBB

ادامهٔ جدول (۱)

شمارهٔ مسئله	تعداد کار	حد بالا	کمینهٔ ET_{max}	زمان اجرا (ثانیه)	حالت جواب
۹۱	۲۰	۱۴۶	۱۴۶	۰/۰۶	PBB
۹۲	۲۰	۱۲۸	۱۲۸	۰/۰۰	PBB
۹۳	۲۰	۱۲۹	۱۲۵	۰/۰۶	PBB
۹۴	۲۰	۸۷	۸۷	۰/۰۰	PBB
۹۵	۲۰	۱۳۹	۱۳۹	۰/۰۰	PBB
۹۶	۲۰	۱۳۹	۱۳۹	۰/۰۶	PBB
۹۷	۲۰	۱۲۶	۱۲۶	۰/۰۰	PBB
۹۸	۲۰	۱۰۶	۱۰۴	۰/۰۰	PBB
۹۹	۲۰	۱۱۰	۱۱۰	۰/۰۰	PBB
۱۰۰	۲۰	۹۶	۹۶	۰/۰۵	PBB
۱۰۱	۲۵	۱۲۲	۱۲۱	۰/۰۰	PBB
۱۰۲	۲۵	۱۵۲	۱۴۷	۷۷/۲۸	PBB
۱۰۳	۲۵	۱۴۳	۱۴۳	۰/۰۰	PBB
۱۰۴	۲۵	۱۳۷	۱۳۵	۰/۰۵	PBB
۱۰۵	۲۵	۱۴۸	۱۴۴	۰/۰۶	PBB
۱۰۶	۲۵	۱۴۳	۱۴۱	۰/۰۶	PBB
۱۰۷	۲۵	۱۱۹	۱۱۹	۰/۰۵	PBB
۱۰۸	۲۵	۱۶۱	۱۶۱	۰/۰۰	PBB
۱۰۹	۲۵	۱۱۸	۱۱۸	۰/۰۰	PBB
۱۱۰	۲۵	۱۶۴	۱۵۹	۰/۰۶	PBB
۱۱۱	۲۵	۱۳۷	۱۳۷	۰/۰۰	PBB
۱۱۲	۲۵	۱۳۷	۱۳۷	۰/۰۰	PBB
۱۱۳	۲۵	۱۶۹	۱۶۷	۰/۰۵	PBB
۱۱۴	۲۵	۱۶۲	۱۶۲	۰/۰۰	PBB
۱۱۵	۲۵	۲۰۴	۲۰۲	۰/۰۵	PBB
۱۱۶	۲۵	۱۴۱	۱۴۱	۰/۰۰	PBB
۱۱۷	۲۵	۱۴۸	۱۴۸	۰/۱۱	PBB
۱۱۸	۲۵	۱۲۹	۱۲۹	۰/۰۰	PBB
۱۱۹	۲۵	۱۳۲	۱۲۸	۰/۰۶	PBB
۱۲۰	۲۵	۱۳۵	۱۳۵	۰/۰۰	PBB
۱۲۱	۴۰	۲۶۰	۲۶۰	۰/۰۰	PBB
۱۲۲	۴۰	۲۲۵	۲۲۵	۰/۰۰	PBB
۱۲۳	۴۰	۲۳۳	۲۳۱	۰/۱۷	PBB
۱۲۴	۴۰	۲۰۱	۲۰۱	۰/۰۰	PBB
۱۲۵	۴۰	۲۲۹	۲۲۸	۰/۱۷	PBB
۱۲۶	۴۰	۲۳۵	۲۳۵	۰/۰۰	PBB
۱۲۷	۴۰	۲۲۵	۲۲۵	۰/۰۵	PBB
۱۲۸	۴۰	۲۰۲	۲۰۲	۰/۰۰	PBB
۱۲۹	۴۰	۲۳۳	۲۳۳	۰/۰۰	PBB
۱۳۰	۴۰	۲۲۱	۲۲۱	۰/۰۰	PBB
۱۳۱	۴۰	۱۸۴	۱۸۴	۰/۰۰	PBB
۱۳۲	۴۰	۲۱۷	۲۱۷	۰/۰۶	PBB
۱۳۳	۴۰	۲۱۷	۲۱۵	۰/۱۷	PBB
۱۳۴	۴۰	۲۲۳	۲۲۳	۰/۰۵	PBB
۱۳۵	۴۰	۲۶۴	۲۶۴	۰/۰۰	PBB

ادامهٔ جدول (۱)

شمارهٔ مسئله	تعداد کار	حد بالا	کمینهٔ ET_{max}	زمان اجرا (ثانیه)	حالت جواب
۱۳۶	۴۰	۲۳۹	۲۳۹	۰/۰۰	PBB
۱۳۷	۴۰	۱۹۹	۱۹۹	۰/۰۰	PBB
۱۳۸	۴۰	۲۵۲	۲۵۲	۰/۰۰	PBB
۱۳۹	۴۰	۲۶۲	۲۶۲	۰/۰۰	PBB
۱۴۰	۴۰	۲۲۱	۲۲۱	۰/۱۱	PBB
۱۴۱	۶۰	۳۳۰	۳۳۰	۰/۰۰	PBB
۱۴۲	۶۰	۳۴۳	۳۴۳	۰/۰۰	PBB
۱۴۳	۶۰	۳۱۷	۳۱۷	۰/۰۰	PBB
۱۴۴	۶۰	۳۲۵	۳۲۰	۰/۵۵	PBB
۱۴۵	۶۰	۴۰۱	۴۰۱	۰/۰۰	PBB
۱۴۶	۶۰	۳۲۰	۳۲۰	۰/۰۰	PBB
۱۴۷	۶۰	۳۸۶	۳۸۶	۰/۰۶	PBB
۱۴۸	۶۰	۳۱۰	۳۱۰	۰/۰۰	PBB
۱۴۹	۶۰	۳۱۷	۳۱۷	۰/۰۶	PBB
۱۵۰	۶۰	۳۲۵	۳۲۵	۰/۰۰	PBB
۱۵۱	۶۰	۳۲۷	۳۲۳	۰/۵۵	PBB
۱۵۲	۶۰	۳۳۴	۳۳۴	۰/۰۰	PBB
۱۵۳	۶۰	۳۴۱	۳۴۱	۱۸۰/۰۵	BES
۱۵۴	۶۰	۳۴۶	۳۴۶	۰/۰۰	PBB
۱۵۵	۶۰	۳۲۰	۳۱۸	۰/۵۵	PBB
۱۵۶	۶۰	۳۵۱	۳۵۱	۰/۰۰	PBB
۱۵۷	۶۰	۳۲۵	۳۲۵	۰/۰۰	PBB
۱۵۸	۶۰	۳۴۰	۳۴۰	۰/۰۰	PBB
۱۵۹	۶۰	۳۸۰	۳۸۰	۰/۵۵	PBB
۱۶۰	۶۰	۳۳۹	۳۳۷	۰/۵۵	PBB
۱۶۱	۱۰۰	۵۷۹	۵۷۹	۰/۰۵	PBB
۱۶۲	۱۰۰	۵۵۴	۵۵۴	۰/۰۵	PBB
۱۶۳	۱۰۰	۵۲۵	۵۲۵	۰/۰۶	PBB
۱۶۴	۱۰۰	۵۶۴	۵۶۴	۰/۱۱	PBB
۱۶۵	۱۰۰	۵۲۸	۵۲۸	۰/۰۶	PBB
۱۶۶	۱۰۰	۵۲۵	۵۲۵	۰/۱۱	PBB
۱۶۷	۱۰۰	۵۶۷	۵۶۷	۰/۱۱	PBB
۱۶۸	۱۰۰	۵۵۱	۵۵۱	۰/۰۵	PBB
۱۶۹	۱۰۰	۵۱۳	۵۱۳	۰/۰۶	PBB
۱۷۰	۱۰۰	۵۱۰	۵۱۰	۰/۰۶	PBB
۱۷۱	۱۰۰	۵۷۰	۵۷۰	۰/۰۶	PBB
۱۷۲	۱۰۰	۵۲۸	۵۲۸	۰/۰۶	PBB
۱۷۳	۱۰۰	۵۱۱	۵۱۱	۰/۲۲	PBB
۱۷۴	۱۰۰	۶۰۳	۶۰۳	۰/۰۵	PBB
۱۷۵	۱۰۰	۵۳۲	۵۳۲	۰/۰۵	PBB
۱۷۶	۱۰۰	۵۳۴	۵۳۴	۰/۱۷	PBB
۱۷۷	۱۰۰	۵۸۲	۵۸۲	۰/۰۶	PBB
۱۷۸	۱۰۰	۶۲۳	۶۲۳	۱۳/۹۵	PBB
۱۷۹	۱۰۰	۵۵۰	۵۵۰	۰/۰۵	PBB
۱۸۰	۱۰۰	۵۶۴	۵۶۴	۰/۰۵	PBB

جدول ۲- خلاصهٔ نتایج حل مسائل در دستهٔ ۱ (τ=0.2 و R=1.6)

تعداد کار	تعداد مسئله در هر دسته	متوسط زمان اجرا (ثانیه)	تعداد حالت جواب با PBB	تعداد حالت جواب با BES
۵	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۷	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۱۲	۲۰	۰/۰۲	۲۰	۰
۱۵	۲۰	۰/۰۲	۲۰	۰
۲۰	۲۰	۰/۰۷	۲۰	۰
۲۵	۲۰	۰/۱۲	۲۰	۰
۴۰	۲۰	۰/۰۱	۲۰	۰
۶۰	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۱۰۰	۲۰	۰/۰۵	۲۰	۰
جمع	۱۸۰		۱۸۰	۰

جدول ۳- خلاصهٔ نتایج حل مسائل در دستهٔ ۲ (τ=0.2 و R=1.6)

تعداد کار	تعداد مسئله در هر دسته	متوسط زمان اجرا (ثانیه)	تعداد حالت جواب با PBB	تعداد حالت جواب با BES
۵	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۷	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۱۲	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۱۵	۲۰	۰/۰۲	۲۰	۰
۲۰	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۲۵	۲۰	۹/۰۷	۱۹	۱
۴۰	۲۰	۹/۰۱	۱۹	۱
۶۰	۲۰	۰/۰۲	۲۰	۰
۱۰۰	۲۰	۰/۰۳	۲۰	۰
جمع	۱۸۰		۱۷۸	۲

برای اختصار از ذکر جزئیات مسائل سایر دسته ها خودداری شده است. خلاصهٔ دستهٔ اول (τ=0.2، R=1.6) در جدول (۲) وجود دارد. این خلاصه برای مسائل دسته‌های دوم، سوم و چهارم به ترتیب در جداول (۳)، (۴) و (۵) آورده شده است. در جدول (۲) تمام ۱۸۰ مسئله، از PBB به جواب بهینه رسیده است. متوسط زمان اجرا در مسائل با اندازه های مختلف کم بوده و حتی در بعضی از دسته ها برابر صفر است. در جدول ۳ فقط ۲ مسئله با ۲۵ و ۴۰ کار در زمان 200 sec به جواب نرسیده‌اند. جواب بهینهٔ ۱۷۸ مسئله از روش شاخه و کرانه به دست آمده است.

از جدول ۳ مشاهده می‌شود که متوسط زمانهای اجرای برنامه برای حل مسائل دسته دوم، از دسته اول بیشتر است. در مسائل دسته سوم بر اساس جدول (۴)، فقط یک جواب بهینه به دست نیامده است. جدول (۵) نشان دهندهٔ این است که تعداد ۱۸ مسئله از ۱۸۰ مسئله به جواب بهینه نرسیده است. متوسط زمان اجرای برنامه برای حل مسائل این دسته از سایر دسته ها بیشتر است. بنابراین می‌توان گفت که با افزایش عامل دیرکرد، τ، و کاهش عامل دامنه موعد تحویل، R، مسائل سخت تر شده و زمان اجرای آنها بیشتر می‌شود. معمولاً زمان اجرا در مسائل تعیین توالی و

جدول ۴- خلاصهٔ نتایج حل مسائل در دستهٔ ۳ (τ=0.2 و R=1.6)

تعداد کار	تعداد مسئله در هر دسته	متوسط زمان اجرا (ثانیه)	تعداد حالت جواب با PBB	تعداد حالت جواب با BES
۵	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۷	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۱۲	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۱۵	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۲۰	۲۰	۰/۰۲	۲۰	۰
۲۵	۲۰	۳/۸۹	۲۰	۰
۴۰	۲۰	۰/۰۴	۲۰	۰
۶۰	۲۰	۹/۱۵	۱۹	۱
۱۰۰	۲۰	۰/۷۷	۲۰	۰
جمع	۱۸۰		۱۷۹	۱

زمانبندی، با افزایش تعداد کار به شدت افزایش می‌یابد. حتی در بسیاری از الگوریتمها، جواب بهینه برای مسائل متوسط و بزرگ در

جدول ۵- خلاصهٔ نتایج حل مسائل در دستهٔ ۴ (τ=0.2 و R=1.6)

تعداد کار	تعداد مسئله در هر دسته	متوسط زمان اجرا (ثانیه)	تعداد حالت جواب با PBB	تعداد حالت جواب با BES
۵	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۷	۲۰	۰/۰۰	۲۰	۰
۱۲	۲۰	۰/۰۵	۲۰	۰
۱۵	۲۰	۰/۴۰	۲۰	۰
۲۰	۲۰	۱۵/۶۷	۱۹	۱
۲۵	۲۰	۷۲/۰۲	۱۲	۸
۴۰	۲۰	۳۶/۰۳	۱۶	۴
۶۰	۲۰	۲۷/۰۳	۱۷	۳
۱۰۰	۲۰	۱۸/۰۸	۱۸	۲
جمع	۱۸۰		۱۶۲	۱۸

زمانهای عادی به دست نمی‌آید. با توجه به تصادفی بودن مسائل و با استفاده از جدولهای (۲) تا (۵) می‌توان ادعا کرد که الگوریتم ارائه شده در مسائل متوسط و بزرگ این مشکل را نداشته و در اکثر موارد جواب بهینه را در زمانهای کوتاه ارائه کرده است.

۵- نتیجه گیری

برای مسئلهٔ یک ماشین، معیار کمینه سازی بیشینه های زودکرد و دیرکرد (ET_{max})بر روی یک ماشین مطرح شد و نشان داده شد که این معیار منطبق بر سیستم تولیدی JIT و بعضی از خطوط مونتاژ است. مسئله در حالتهای خاص و عمومی مورد بررسی قرار گرفت و قضایای مفیدی ارائه و اثبات شدند. در این قضایا شرایط همسایگی کارها در یک ترتیب بهینه ارائه شد. همچنین برای کارا بودن روش شاخه و کرانه ، حدود بالا و پایین قوی ارائه و اثبات شد. مسائل در اندازه های ۵ کار تا ۱۰۰ کار به صورت تصادفی تولید و حل شدند. ۷۲۰ مسئله در ۴ دسته حل شدند. برای اکثر آنها، حتی مسائل بزرگ ، جواب بهینه در زمانهای کوتاه به دست آمد. برای بقیه مسائل یک جواب امکانپذیر و خوب ارائه داده شد. هنوز می‌توان معیار ET_{max} را در مسئلهٔ یک ماشین مورد بررسی قرار داد و احتمالا شرایط دیگری برای همسایگی کارها در جواب بهینه به دست آورد. چون ET_{max} یک معیار نامنظم است می توان فرض مجاز نبودن بیکاری عمدی را حذف کرده و مسئلهٔ جدیدی تعریف کرد. همچنین می‌توان این معیار را در بیش از یک ماشین مورد بررسی قرار داد.

واژه نامه

1. scheduling
2. sequencing
3. ready time
4. due date
5. processing time
6. idle insert
7. earlist due date
8. branch & bound
9. dynamic programming
10. heuristic
11. simulated annealing
12. tabu search
13. nonregular
14. permutation schedule
15. minimum slack time
16. longest processing time
17. partial sequence

مراجع

1. Baker, K. R., *Introduction to Sequencing and Scheduling*, John Wiley, New York, 1974,
2. French, S., *Sequencing and Scheduling: An Introduction to the Mathematics of the Job-Shop,* Ellis Horwood Limited, Chichester, 1986.
3. Ben-daya, M., and Al-fawzan, M., "A Simulated Annealing Approach for the One-Machine Mean Tardiness Scheduling Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol. 93, No.1, pp. 61-67, 1996.
4. Emmons, H., "One-Machine Sequencing to Minimize Certain Function of Job Tardiness," *Operation Research*, Vol. 17, No. 4, 1969.
5. Sen, T., and Borah, B.N., "On the Single-Machine Scheduling Problem with Tardiness Penalties," *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 42,

No. 8, pp. 695-702, 1991.

6. Holsenback, J.E., and Russell, R.M., "A Heuristic Algorithm for Sequencing on One Machine to Minimize Total Tardiness," *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 43, No. 1, pp. 53-62, 1992.
7. Panwalkar, S.S., Smith, M.L., and Koulamas, C.P., "A Heuristic for the Single Machine Tardiness Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol. 70, No. 3, pp. 304-310, 1993.
8. Islam, A., and Eksioglu, M., "A Tabu Search Approach for the Single Machine Mean Tardiness Problem," *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 48, No. 7, pp. 751-755, 1997.
9. Ow, P.S., and Morton, T.E., "The Single Machine Early/Tardy Problem," *Management Science*, Vol.35, No. 2, pp. 177-191, 1989.
10. Zegordi, S.H., Itoh, K., and Enkawa, T., "A Knowledgeble Simulated Annealing Scheme for The Early/Tardy Flow Shop Scheduling Problem," *International Journal of Production Research*, Vol. 33, No. 5, pp. 1449-1466, 1995.
11. Yano, C.A., and Kim, Y.D., "Algorithms for a Class of Single-Machine Weighted Tardiness and Earliness Problems," *European Journal of Operational Research*, Vol. 52, No. 2, pp. 167-178, 1991.
12. Szwarc, W., and Mukhopadhyay, S.K., "Optimal Timing Schedules in Earliness-Tardiness Single Machine Sequencing," *Naval Research Logistics*, Vol. 42, No. 7, pp. 1109-1114, 1995.
13. Dileepan, P., "Common Due Date Scheduling Problem with Separate Earliness and Tardiness Penalties," *Computers & Operational Research*, Vol. 20, No. 2, pp. 179-184, 1993.
14. James, R.J.W., and Buchanan, J.T., "A Neighbourhood Scheme with a Compressed Solution Space for the Early/Tardy Scheduling Problem," European Journal of Operational Research, Vol. 102, No. 3, pp. 513-527, 1997.
15. Kim, Y.D., and Yano, C.A., 'Minimizing Mean Tardiness and Earliness in Single-Machine Scheduling Problems with Unequal Due Dates', Naval Research Logistics, Vol. 41, No. 7, pp. 913-933, 1994.