

# جریان درهم در نواحی دو بعدی با هندسه پیچیده - روش اجزای محدود

محمد صادق صادقی پور\* و رامین رزمی\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۱/۲۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۶/۸/۲۵)

چکیده - با به کارگیری تکنیکهای عددی آزمایش شده و مورد تایید، یک کد اجزای محدود برای تحلیل جریانهای دائم درهم در محیطهای دو بعدی با هندسه پیچیده تهیه شده است. برای جلوگیری از نوسانات حل عددی از روش اجزای محدود پتروف گالرکین استفاده شده و مدل درهمی به کار رفته مدل دو معادله ای  $k-w$  است. معادله های گسسته شده به روش بلوک ضمنی به صورت دستگاه معادله های غیر خطی درآمده و با کمک روش نیوتن - رافسون خطی شده است. دستگاه معادله های جبری خطی شده به روش جبهه<sup>۱</sup> حل شده اند که در نهایت یک حل کاملاً ضمنی را ایجاد می کند. با استفاده از این کد چند مسئله نمونه از جریانهای آرام و درهم حل شده و نتایج حاصله با نتایج کارهای عددی و تجربی موجود مقایسه شده اند. سازگاری بین نتایج بسیار مطلوب است.

## Turbulent Flow in 2-D Domains with Complex Geometry-Finite Element Method

M.S. Sadeghipour and R. Razmi

Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology

**ABSTRACT-** *Using the highly recommended numerical techniques, a finite element computer code is developed to analyse the steady incompressible, laminar and turbulent flows in 2-D domains with complex geometry. The Petrov-Galerkin finite element formulation is adopted to avoid numerical oscillations. Turbulence is modelled using the two equation k-w model. The discretized equations are written in the form of a set of nonlinear equations by block implicit method and are then linearized by the Newton-Raphson method. The set of linearized equations are, finally, solved Through Frontal method. This generates a full implicit solution. A few laminar and turbulent flow sample problems are solved using the code. Results obtained are in perfect agreement with those obtained from numerical and experimental works reported in the literature.*

\*\* دانشجوی دکترا

\* دانشیار

| فهرست علائم              |                                    |
|--------------------------|------------------------------------|
| $F$                      | نیروی بدنی                         |
| $I$                      | شدت درهمی                          |
| $k$                      | انرژی جنبشی درهمی                  |
| $l$                      | بعد طولی گردابه                    |
| $M, N$                   | توابع تقریب                        |
| $p$                      | فشار                               |
| $u$ و $v$                | مؤلفه‌های متوسط                    |
| سرعت                     | $u', v'$                           |
| مؤلفه‌های نوسانی         |                                    |
| سرعت                     | $u_{\tau}$                         |
| سرعت برشی                | $u^+$                              |
| سرعت بدون بعد            | $W$                                |
| تابع وزن                 | $y^+$                              |
| فاصله بدون بعد از دیواره |                                    |
| $\nu$                    | لزجت مولکولی                       |
| $\nu_t$                  | لزجت گردابه‌ای                     |
| $\rho$                   | جرم حجمی                           |
| $\omega$                 | نرخ اتلاف انرژی در واحد حجم و زمان |

## ۱- مقدمه

مدلهای  $k-\epsilon$ ، RSM، و  $k-\omega$  اشاره کرد [۳]. تاکنون برنامه‌های بسیاری در این زمینه تهیه شده‌اند که معمولاً به صورت تجاری‌اند. به عنوان مثال می‌توان از برنامه Flow Plus 3D متعلق به کاسموس نام برد که یک برنامه تجاری است و در نوشتن آن از روش اجزای محدود استفاده شده است. این برنامه برای حل معادله‌های از تکنیک عددی مجزاسازی متغیرها<sup>۲</sup> استفاده می‌کند. مدل‌های آشفتگی به کار رفته در این برنامه مدل‌های  $k-\epsilon$  و RNG هستند. این برنامه قادر است مسائل حتی سه بعدی، تا حداکثر ۶۴۰۰۰ جزء، را بر روی یک رایانه شخصی حل کند [۴]. برنامه کلک<sup>۳</sup> یک برنامه غیرتجاری است که به روش حجم محدود نوشته شده و از مدل‌های  $k-\epsilon$  و RSM برای مسائل سه بعدی استفاده می‌کند. این برنامه برای محدوده‌های پیچیده، به علت استفاده از روش حجم محدود در مسائل سه بعدی، از دقت مناسب برخوردار نیست [۵]. برنامه حاضر نتیجه جمع‌آوری روش‌های عددی مختلفی است که در یک مجموعه گردآمده‌اند و براساس توانایی موجود (سرعت-حجم حافظه) نتایج مطلوبی را نشان می‌دهند.

با استفاده از کد تهیه شده تعدادی مسائل نمونه برای هر دو حالت جریانهای آرام و درهم حل شده‌اند که از بین آنها می‌توان به جریان درون حفره و جریان از روی یک پله اشاره کرد. نتایج به دست آمده با نتایج تجربی موجود سازگاری بسیار خوب و مناسبی دارند.

## ۲- معادله‌های ریاضی حاکم

معادله‌های حاکم بر جریان درهم دو بعدی برای حالت تراکم ناپذیر دائم، شامل معادله‌های پیوستگی و اندازه حرکت است که با

برای بررسی عملکرد هیدرولیکی بسیاری از اجزاء و سازه‌های هیدرولیکی تاکنون از روش‌های تجربی استفاده می‌شده است که از آن میان می‌توان به آزمایش مدل هیدرولیکی دریچه‌ها و اتصالات Y شکل اشاره کرد. بدیهی است که انجام آزمایش‌های تجربی بسیار مشکل و پرهزینه بوده و تکرار آن برای حالت‌های مختلف عملاً ناممکن است. در سال‌های اخیر روش‌های عددی با توانایی بالا قادر بوده‌اند خدماتی را ارائه دهند که یک آزمایش تجربی به هیچ وجه قادر به ارائه آنها نیست، در حالی که مدلسازی تجربی جریان در چنین ناحیه‌ای بسیار پرهزینه، زمان گیر و پر زحمت است. برای مثال جریان در داخل یک اتصال Y شکل را می‌توان به خوبی توسط روش عددی مدل و آن را بهینه‌سازی کرد. طبیعی است که تهیه و به کارگیری چنین برنامه‌های رایانه‌ای، مسائل و مشکلات خاص خود را نیز دارد. هدف از پژوهش حاضر نهایتاً تهیه یک کد رایانه‌ای اجزای محدود جامع بوده است تا بتوان با استفاده از آن جریان و انتقال گرمای تراکم ناپذیر درهم را در محیط‌های سه بعدی با هندسه پیچیده مدل کرد. به دلیل توانمندی روش اجزای محدود در مدل کردن نواحی پیچیده از روش اجزای محدود استفاده شده است. در فاز اول این پژوهش برنامه‌ای برای تحلیل جریانهای آرام و درهم دو بعدی تهیه شد که نتایج به دست آمده در اینجا گزارش خواهند شد. برای این منظور معادله‌های ناویر - استوکس برای جریان درهم (معادله‌های رینولدز) حل شده‌اند، درحالی که جمله لزجت گردابه به شکل مناسب مدل شده است. بدیهی است که برای مدل کردن درهمی باید از مدل‌های پیشرفته استفاده کرد. برای این منظور مدل‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند که از بین آنها می‌توان به

گرچه مدل  $k-\omega$  ، به ازای ثابتهای داده شده بالا، برای بسیاری از جریانهای دوبعدی و سه بعدی به نتایج بسیار خوبی منجر می شود، لیکن، این موضوع عمومیت ندارد. با تغییر مقادیر عددی ثابتهای بالا می توان دامنه اعتبار و دقت مدل  $k-\omega$  را افزایش داد [۴]. تغییر در ثابتهای بالا باعث تغییر در تخمین گرادیان فشار خواهد شد.

#### ۴- شرایط مرزی

در جریانهای داخلی شرایط مرزی بر روی چهار مرز شامل مقاطع ورودی و خروجی، دیواره و محور تقارن تعریف می شوند. الف - شرایط مرزی ورودی: در ورود معمولاً توزیع سرعت به یکی از دو صورت سهموی و یا یکنواخت برای جریان آرام و یا به صورت توان  $\frac{1}{V}$  برای جریان درهم تعریف می شود. اگر توزیع سرعت یکنواخت باشد، باید طول مسیر را به اندازه کافی زیاد گرفت تا یک جریان کاملاً توسعه یافته به وجود آید. برای متغیرهای درهمی در ورود نیز می بایست مقادیر معلوم وارد شود. می توان از تعریف انرژی جنبشی درهمی استفاده کرد:

$$k = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) \quad (8)$$

که با تعریف شدت درهمی به صورت:

$$I = \frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} \quad (9)$$

و جاگذاری در معادله (۸) خواهیم داشت:

$$k = \frac{1}{2} [(Iu)^2 + (Iv)^2] \quad (10)$$

مقدار شدت درهمی بیان کننده قدرت نوسانات در جریان درهم است، که با افزایش درهمی جریان مقدار  $I$  نیز افزایش می یابد. مقدار  $I$  معمولاً بین ۵ تا ۲۰ درصد متغیر است که مقدار  $I$  بیش از ۱۰ درصد معرف جریان با درهمی شدید است [۴].

$$\omega = \frac{k^{0.5}}{l} \quad (11)$$

که در این معادله  $l$  بُعد طولی گردابه بوده و معمولاً به صورت کسری

فرض ایزوتروپیک بودن اثر درهمی می توان آنها را به شکل زیر نوشت:

$$u_{i,i} = 0 \quad (1)$$

$$u_j u_{i,j} = \frac{1}{\rho} p_{,i} + [(\nu + \nu_t)(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + F_i \quad (2)$$

#### ۳- مدل درهمی

در این معادله ها مدل های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته و از بین آنها مدل دو معادله ای  $k-\omega$  برای استفاده در این کد انتخاب شده است. این مدل، به خصوص در معادله با پیش بینی اثرات گرادیان فشار معکوس، نسبت به مدل  $k-\epsilon$  دارای برتری است. معادله های این مدل به صورت زیرند [۳].

$$\nu_t = k/\omega \quad (3)$$

انرژی جنبشی درهمی:

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\sigma^* \nu_t + \nu) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\sigma^* \nu_t + \nu) \frac{\partial k}{\partial y} \right] - \beta^* k \omega + G \quad (4)$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\sigma \nu_t + \nu) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\sigma \nu_t + \nu) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] - \beta \omega^2 + \alpha \frac{\omega}{k} G \quad (5)$$

در این معادله ها  $G$  به شکل زیر تعریف می شود:

$$G = \nu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (6)$$

مقادیر ثابتها عبارت اند از:

$$\alpha = 5/9, \beta = 3/40, \beta^* = 9/100, \sigma = 1/2, \sigma^* = 1/2 \quad (7)$$

معادله‌های جریان و درهمی در کنار دیواره، در ناحیه لگاریتمی، نوشته و با مقیاس ابعادی ساده شوند خواهیم داشت [۳].

$$\circ = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (14)$$

$$\circ = \nu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \beta^* \omega k + \sigma^* \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu_t \frac{\partial k}{\partial y} \right] \quad (15)$$

$$\circ = \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \beta \omega^2 + \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu_t \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \quad (16)$$

این معادله‌ها برای لایه‌ای از سیال نوشته شده که در آن  $\nu_t \ll \nu$  است. با استفاده از روش ریاضی اغتشاش<sup>۴</sup> می‌توان حل تقریبی معادله‌های بالا را به دست آورد [۳].

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + B, k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{\beta^*}}, \omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{\beta^* \kappa y}} \quad (17)$$

این معادله‌ها که به آن قانون دیواره گویند، در فاصله  $35 \leq y^+ \leq 350$  معتبرند، درحالی که حد پایینی در مواردی تا  $y^+ = 11/63$  نیز کاهش می‌یابد. چنانچه برای ناحیه‌ای، در فواصلی کمتر از حد پایینی فاصله فوق به دیواره، از قانون دیواره استفاده شود موجب کم شدن افت فشار تخمینی خواهد شد. به عکس، اگر برای مقادیر بزرگتر از  $y^+ = 350$  از این معادله‌ها استفاده کنیم به تخمین افت فشار بیشتر متجر خواهد شد. برای ناحیه خارج از این محدوده باید از معادله‌های حاکم در همان ناحیه استفاده کرد. در محدوده  $11/63 \leq y^+ \leq \nu_t \gg \nu$  بوده و لذا توزیع سرعت به صورت خطی خواهد بود:

$$u^+ = y^+ \quad (18)$$

و برای مقادیر  $k$  و  $\omega$  از معادله (۱۷) استفاده می‌شود. باید توجه کرد که کلیه این معادله‌ها در حالت سطح صاف صادق بوده و برای سطوح زبر باید زبری نیز در معادله‌های وارد شود.

از آنجا که فشار به صورت مشتق درجه اول در معادله‌ها ظاهر شده است نیاز به تعریف شرط مرزی فشار بر روی هیچ یک از مرزها نبوده و تنها معلوم بودن مقدار فشار در یک نقطه از ناحیه کافی است.

از اندازه مقطع ورودی جریان است. در اکثر جریانهای مهندسی این کسر معمولاً برابر یک درصد انتخاب می‌شود [۴]. لیکن، یک راه مناسب برای تعیین مقادیر درهمی در ورود، استفاده از مقادیر مربوط به خروجی از حل یک مسئله کانال است. با حل یک مسئله کانال که شرایط خروجی آن با ورودی مسئله مورد نظر مشابهت دارد، می‌توان مقادیر کمیت‌های درهمی را در خروجی کانال به عنوان ورودی مسئله مورد نظر به کار برد.

ب - شرایط مرزی خروجی: چنانچه ناحیه خروجی دارای مقطع ثابت باشد و مقطع خروجی از مقطع ورودی به اندازه کافی دور باشد، فرض توسعه یافته بودن جریان مناسب است. در این حالت از شرط صفر بودن گرادیان متغیرها در جهت جریان استفاده می‌شود، لذا:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \Phi = u, v, k, \omega \quad (19)$$

چنانچه ناحیه خروجی دارای سطح متغیر باشد، نمی‌توان گرادیان سرعت  $u$  را در خروج برابر صفر قرارداد، چون اصل بقای جرم نقض خواهد شد. بنابراین شرط مزبور به شکل زیر اصلاح می‌شود:

$$\frac{\partial (uA)}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

که در این معادله  $A$  سطح مقطع خروجی است.

ج - محور تقارن: چنانچه ناحیه حل دارای محور تقارن باشد، شرط مرزی در این مرز، صفر بودن سرعت و نیز گرادیان سایر متغیرها در جهت عمود بر محور تقارن است.

د - شرایط مرزی دیواره: در این مرز ساده‌ترین شرایط برای مؤلفه‌های سرعت و دشوارترین و مهمترین آنها مربوط به متغیرهای درهمی است. شرایط مرزی سرعت، صفر بودن مؤلفه آن در جهت عمود بر دیواره و مساوی بودن مؤلفه مماسی سرعت با سرعت دیواره، شرط عدم لغزش است. برای متغیرهای درهمی اعمال شرایط مرزی دیواره مشکل است. از آنجایی که بر روی دیواره لزجت گردابه صفر است، لذا  $k$  نیز صفر می‌شود، اما  $\omega$  هیچ محدودیتی نمی‌تواند داشته باشد. این امر باعث می‌شود که برای معادله‌های درهمی شرط مرزی در نزدیکی دیواره اعمال شود. اگر

$$\Phi = N_i(x, y) \Phi_i \quad \Phi = u, v, k, \omega \quad i = 1, \dots, 8 \quad (19)$$

$$p = M_i(x, y) p_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (20)$$

معادله‌های پیوستگی و اندازه حرکت و نیز معادله‌های مربوط به متغیرهای دره‌می  $k, \omega$  را با استفاده از روش پتروف گالرکین به صورت گسسته در می‌آوریم. در اینجا تنها به ارائه شکل گسسته مؤلفه  $x$  معادله اندازه حرکت اکتفا می‌شود. برای متغیرهای  $k$  و  $\omega$  نیز به همین ترتیب عمل می‌شود. علاقه‌مندان برای اطلاعات بیشتر به [۱] مراجعه کنند.

$$\int_{A^e} W_i \left[ N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_1}{\partial x} p_i \right] dA^e + \int_{A^e} \nu \left[ \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right] dA^e = 0 \quad (21)$$

معادله پیوستگی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{A^e} W_i \left[ \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right] dA^e = 0 \quad (22)$$

که در معادله (۲۲)، تابع وزن  $W_i$  یک درجه کمتر از تابع وزن سایر معادله‌ها است، و این به منظور غیر منفرد کردن ماتریس ضرایب است، که ابتدا منجر به کاهش تعداد متغیرهای فشار نسبت به متغیرهای سرعت، و در نهایت به کاهش تعداد معادله‌های پیوستگی نسبت به تعداد معادله‌های اندازه حرکت می‌شود. به‌طور کلی هرگاه توابع وزن و توابع شکل از فضاهای یکسانی انتخاب شوند، در این صورت روش اعمالی را روش گالرکین گویند. در آن صورت جملات جابه‌جایی به صورت اختلاف مرکزی ظاهر می‌شوند. لذا، در زمان حل این معادله، با افزایش رینولدز جریان ناپایداری در حل به وجود می‌آید. اگر توابع فوق از فضاهای متفاوتی انتخاب شوند، به آن روش پتروف گالرکین می‌گویند. در این صورت فرمول عددی به دست آمده طبیعت میراکندگی نوسانات را خواهد داشت. این روش که جوابهایی بسیار هموار و بدون نوسان ایجاد می‌کند، به روش بالادست معروف بوده و استفاده از آنها بسیار متداول شده است. عموماً سه روش بالادست کردن متداول است که به بالادست

## ۵- مدل‌سازی عددی مسئله

برای حل عددی معادله‌ها معمولاً می‌توان از سیمپل<sup>۵</sup> استفاده کرد که معمولاً در روش تفاضل محدود مطرح و استفاده شده است، لیکن، استفاده از آن را می‌توان به روش اجزای محدود نیز تعمیم داد. روشهای دیگری نیز برای حل معادله‌های وجود دارند که مشخصاً در اجزای محدود مورد استفاده قرار می‌گیرند، نظیر روشهای مجزا کردن، پنالتی و بلوک ضمنی. در اینجا از روش بلوک ضمنی استفاده شده است، گرچه در تعمیم این کد به سه بعد، استفاده از روش مجزا کردن الزامی است. در روش مجزا کردن، کلیه متغیرها به صورت مجزا از هر یک از معادله‌ها محاسبه می‌شوند [۴، ۶ و ۷]. در اینجا، عمده‌ترین مشکل، ظاهر نشدن جمله فشار در کلیه معادله‌هاست، و لذا سعی می‌شود تا با اضافه کردن یک معادله فشار، که از تعمیم معادله‌ها موجود حاصل می‌شود، این متغیر را نیز در معادله مورد نظر ظاهر کرد. در روش پنالتی، فشار از کلیه معادله‌ها حذف شده و معادله‌های حاصل را تنها برای متغیرهای سرعت حل می‌کنند. در روش پنالتی، به دلیل وجود خطا، باید مسئله را با دقت مضاعف حل کرد. در روش بلوک ضمنی کلیه متغیرها به صورت یک بلوک و به نام یک متغیر بلوک شکل در نظر گرفته شده و به صورت دستگاه معادله‌ها حل می‌شوند.

برای گسسته‌سازی معادله‌ها از روش اجزای محدود استفاده شده است. این به دلیل توانایی بیشتر اجزای محدود به خصوص در مدل کردن نواحی با هندسه پیچیده است. از آنجا که برخلاف مسائل مکانیک جامدات، مسائل مکانیک سیالات را معمولاً نمی‌توان توسط روش تغییرات برای حل اجزای محدود فرمولبندی کرد، لذا از روش پتروف گالرکین که یکی از روشهای باقیمانده وزنی است، استفاده می‌شود. تنها برای مسائل جریان غیرچرخشی، غیرلزج و اخیراً جریان لزج آرام [۸]، شکل تغییراتی اجزای محدود به دست آمده‌اند. باید توجه داشت که روش گالرکین در مورد مسائل جابه‌جایی - انتشار که در آنها جملات جابه‌جایی بر جملات انتشار تسلط دارند، دارای ناپایداری عددی است. این مشکل معمولاً با به کارگیری روشهای بالادست<sup>۶</sup> برطرف می‌شود.

## ۶- فرمولبندی اجزای محدود

با معرفی توابع تقریب به شکل:

با استفاده از نقاط انتگرالگیری بالادست عددی خط جریان<sup>۸</sup> و پتروف گالرکین بر روی خط جریان<sup>۹</sup> موسوم هستند [۹]، که در اینجا از روش سوم استفاده شده است. در این روش تابع وزن به شکل معادله‌ای برحسب تابع و مشتقهای آن بیان می‌شود. ضرایب این معادله به گونه‌ای اند که تأثیر مشتق تقریب را در جهت جریان به حداکثر می‌رسانند.

اعمال روش بلوک ضمنی به همراه اجزای محدود به معادله‌های جریان و درهمی، به سیستمی از معادله‌های جبری غیر خطی منجر می‌شود، که می‌بایست آنها را خطی کرده و حل کرد. خطی کردن معادله‌ها به صورت تکرار، با استفاده از روش نیوتن - رافسون صورت می‌گیرد. چنانکه از روش مجزاسازی استفاده شود سیستم معادله‌های حاصله خطی خواهد بود.

## ۷- مثالهای نمونه

بر مبنای روشهای بالا یک برنامه رایانه‌ای تهیه شده است که قادر است جریانهای آرام و درهم دو بعدی را در حالت دائم در محیط‌های با هندسه پیچیده تحلیل کند. به منظور تعیین و تأیید اعتبار و دقت این کد چند مسئله نمونه انتخاب و نتایج حاصل از حل آنها با نتایج عددی و تجربی گزارش شده توسط سایر مراجع مقایسه شده‌اند. در اینجا به ذکر و ارائه برخی از آنها می‌پردازیم. برنامه به گونه‌ای تهیه شده که می‌توان به‌طور انتخابی از روش تکرار معمولی و یا نیوتن - رافسون استفاده کرد. لیکن، به‌طور معمول شروع تکرار با روش تکرار معمولی بوده و سپس برای سرعت بخشیدن در رسیدن به یک دقت مناسب از روش نیوتن - رافسون استفاده می‌شود. این عمل باعث خواهد شد که مقادیر اولیه مورد نیاز برای شروع استفاده از روش نیوتن - رافسون در محدوده همگرایی این روش قرار گیرد. برای اطلاع از جزئیات کامل نتایج به [۱] مراجعه شود.

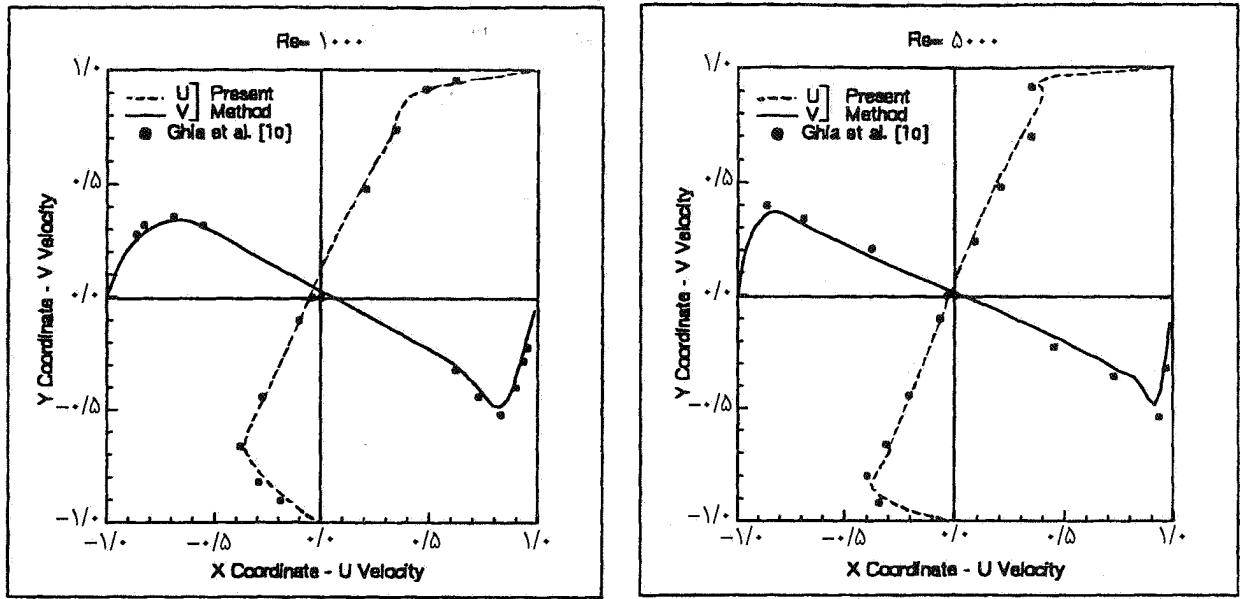
### الف - جریان در یک حفره

این مسئله یکی از مسائل مرجع، برای بررسی دقت نتایج حاصل از حل جریان لزج آرام دو بعدی است. این مسئله برای چهار رینولدز مختلف و با استفاده از یک شبکه  $20 \times 20$  حل شده است عدد رینولدز بر مبنای سرعت بیشینه و حداکثر بعد حفره تعریف

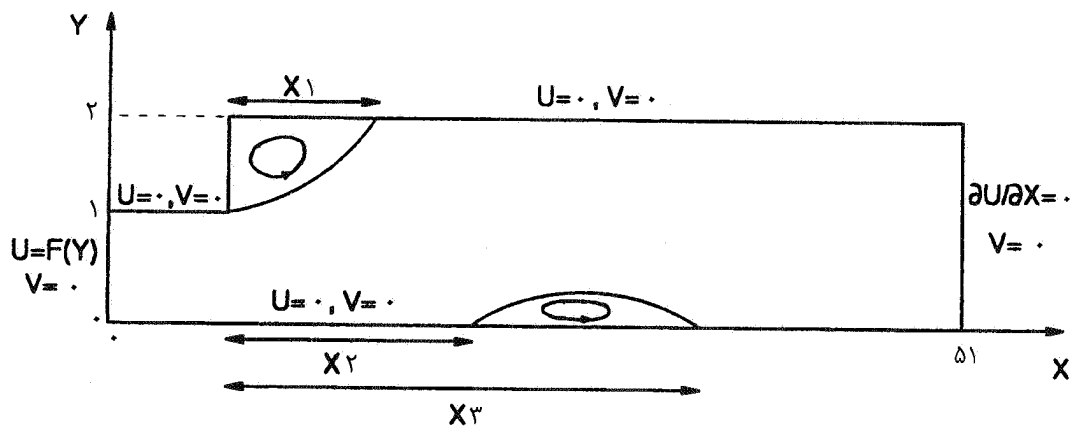
می‌شود. اجزا در نواحی مرزی حفره ریزتر و در نواحی مرکزی درشت‌تر انتخاب شده‌اند. برای تسریع در حل، نتایج مربوط به رینولدزهای پایتتر به عنوان مقادیر اولیه برای حل مسائل با رینولدز بیشتر انتخاب شده‌اند. تعداد تکرار روش نیوتن - رافسون برای هر رینولدز در حدود ۵ تا ۶ تکرار و زمان اجرا در یک رایانه DX۴-۴۸۶ در حدود ۱۵ دقیقه بوده است. نتایج به دست آمده به صورت توزیع مؤلفه افقی سرعت در خط مرکزی عمودی و مؤلفه عمودی سرعت در خط مرکزی افقی در شکل ۱ ارائه و با نتایج عددی مرجع [۱۰] مقایسه شده‌اند. نتایج مذکور بر اساس یک شبکه  $129 \times 129$  و با روش چند شبکه‌ای<sup>۱</sup> به دست آمده‌اند. همان گونه که دیده می‌شود نتایج کاملاً با یکدیگر سازگارند. بیشترین اختلاف در نتایج، مربوط به عدد رینولدز ۵۰۰۰ و مربوط به مقدار سرعت بیشینه است. حتی در اینجا نیز در ارتباط با محل وقوع سرعت بیشینه اختلاف چندانی وجود ندارد.

### ب - جریان آرام از روی یک پله

یکی دیگر از مسائل مرجع برای مقایسه، مسئله جریان آرام از روی یک پله است. حل این مسئله به دو صورت عددی و تجربی موجودند. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که در اعداد رینولدز کم (کمتر از ۴۵۰) تنها یک گردابه در پشت پله به وجود می‌آید در حالی که با افزایش عدد رینولدز، گردابه دیگری در کف کانال ایجاد می‌شود. در اینجا عدد رینولدز بر مبنای ارتفاع پله و سرعت بیشینه تعریف می‌شود. شکل ۲ ناحیه حل را همراه با شرایط مرزی مربوطه نشان می‌دهد. برای حل این مسئله از یک شبکه با  $1050$  جزء و  $3301$  گره استفاده شده است. در نواحی، با تغییرات زیاد از شبکه ریز و در سایر نواحی از شبکه درشت‌تر استفاده شده است. در اینجا نیز مشابه مسئله قبل، نتایج حل مسائل با رینولدز پایتتر به عنوان مقادیر اولیه در حل مسائل با رینولدز بالاتر استفاده شده‌اند. تعداد تکرار برای هر رینولدز در حدود ۲۵ و زمان حل در حدود یک ساعت است. شکل ۳ مقایسه‌ای در مورد طولهای مربوط به نقاط شروع و پایان جدایی جریان در دو ناحیه بعد از پله و در کف، بین کار حاضر و نتایج تجربی و عددی است [۱۱ و ۶]. مبدأ اندازه‌گیری طولها، پای پله است. کار عددی مقایسه‌ای، با استفاده از یک شبکه  $3321$  جزء و با اجزای چهارگرمی و روش مجزاسازی به



شکل ۱- مقایسه نتایج مسئله حفره و کار عددی مشابه [۱۰]



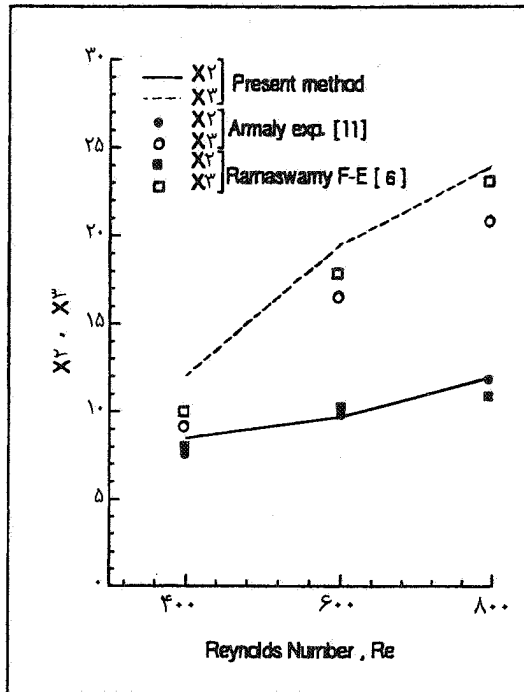
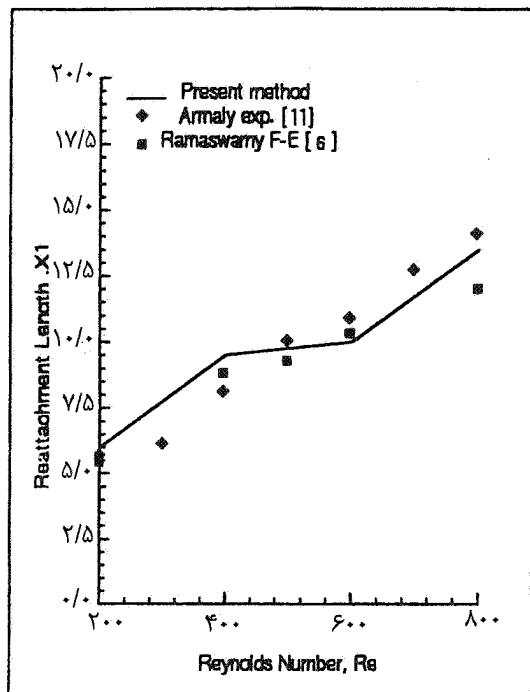
شکل ۲- شرایط مرزی جریان روی یک پله و موقعیت گردابه ها

عددی گزارش شده موجود [۲ و ۱۲] مقایسه شده‌اند. برای حل عددی از یک شبکه  $50 \times 10$  استفاده شده که در مجموع حاوی ۵۰۰ جزء و ۱۶۲۱ گره است. در نواحی ورودی، شبکه‌ها ریزتر انتخاب شده‌اند. برای توزیع سرعت ورودی از قانون توان  $\frac{1}{V}$  استفاده شده است. تعداد تکرار لازم برای همگرایی در حدود ۵۰ و زمان لازم در حدود سه ساعت است. حل عددی مورد مقایسه توسط یک برنامه حجم محدود در یک شبکه  $80 \times 30$  و با استفاده از مدل درهمی k-ε به دست آمده است. در شکل ۴ نتایج کار حاضر با نتایج حل

دست آمده‌است. نتایج، تطابق بسیار خوبی را نشان می‌دهند. اختلاف موجود در پیش‌بینی موقعیت انتهای گردابه کف، بین روشهای عددی و تجربی را می‌توان به اثرات سه بعدی بودن جریان بر روی نتایج تجربی نسبت داد.

### ج - جریان درهم بین دو صفحه موازی

به عنوان اولین مثال جریان درهم، جریان درهم بین دو صفحه موازی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج با کارهای تجربی و



شکل ۳- موقعیت اتصال جریان برحیب رینولدز در جریان ا روی یک پله. سمت چپ طول اتصال در گرداب اول سمت راست موقعیت جدایی و اتصال در گرداب دوم

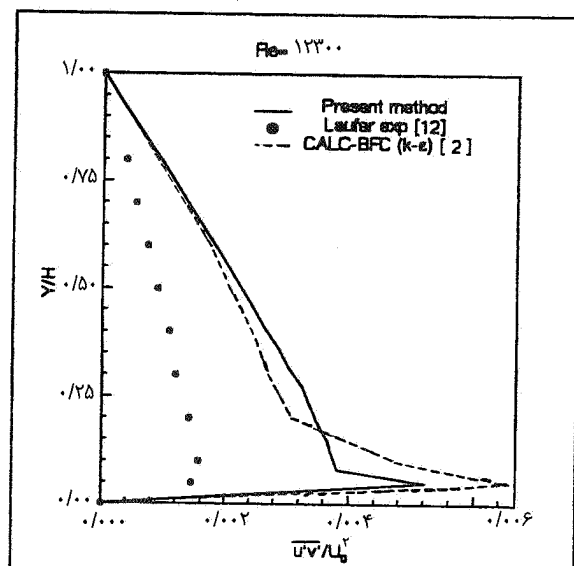
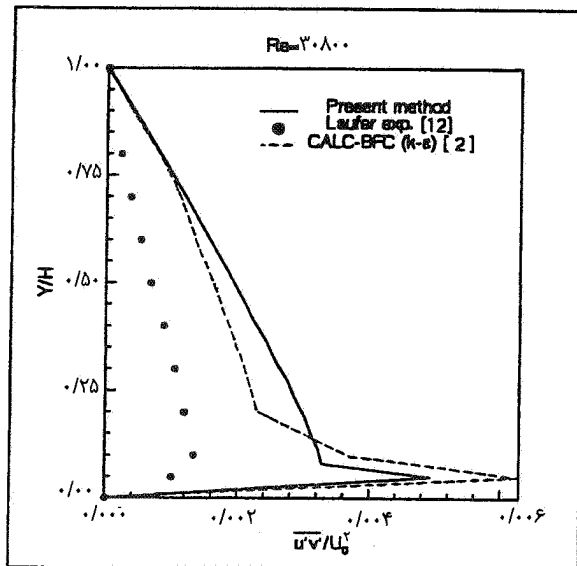
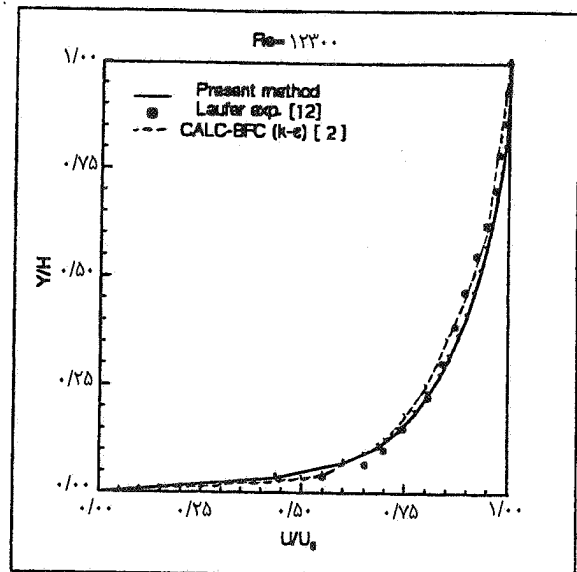
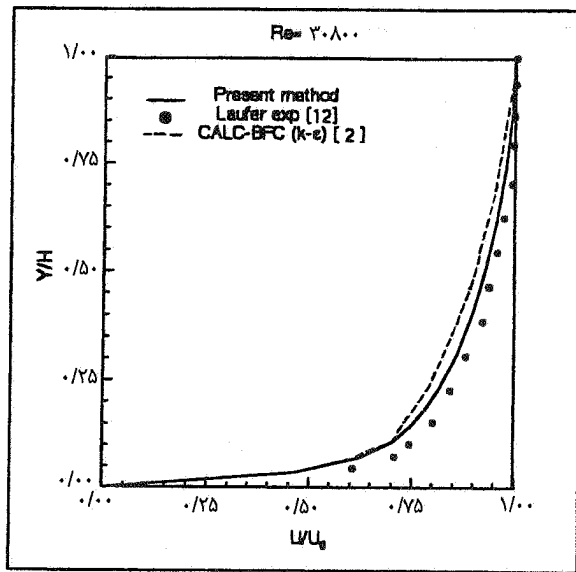
$k-\epsilon$ ، در ناحیه لزج خطای کمتری نشان می‌دهد [۳]. عدد رینولدز برحسب نصف ارتفاع کانال و سرعت بیشینه تعریف می‌شود.

#### د - جریان درهم از روی یک پله

آخرین مسئله نمونه، جریان درهم از روی پله است. هندسه ناحیه حل و شبکه تولید شده مشابه حالت جریان آرام است با این تفاوت که در مجاورت پله از شبکه ریزتر استفاده شده است. عدد رینولدز تعریف شده براساس ارتفاع پله و سرعت ورودی بیشینه، مساوی ۱۱۰۰۰۰ است. برای اطمینان از توسعه یافتگی جریان خروجی، طول کانال چهل برابر ارتفاع پله انتخاب شده است. برای شرط مرزی ورودی، در معادله‌های جریان و درهمی، از جواب در ناحیه خروجی کانال (جریان بین دو صفحه موازی) استفاده شده است. تعداد تکرار حدود ۹۶ و زمان همگرایی در حدود ۶/۵ ساعت است. محاسبات حاضر طول ناحیه اتصال از پای پله را با حدود ۴/۵ درصد اختلاف نسبت به نتایج تجربی [۲] پیش‌بینی می‌کند. شکل ۵ توزیع سرعت را در سه فاصله (۲ و ۴ و ۱۰) نسبت به

عددی و تجربی موجود مقایسه شده است. نتایج مربوط به توزیع سرعت سازگاری بسیار خوبی با نتایج تجربی دارد. این سازگاری در اعداد رینولدز کمتر، به مراتب بهتر است. لیکن، به طور کلی نتایج عددی مربوط به تنش‌های رینولدزی نسبتی  $\frac{u'v'}{U^2}$  اختلاف بیشتری با نتایج تجربی دارند، که متناسب با افزایش فاصله از دیواره این اختلاف کمتر می‌شود. برای توجیه این اختلاف باید گفت که در مدل‌های دو معادله‌ای برای به دست آوردن تنش‌های رینولدزی از معادله‌های صریحی برحسب لزجت درهمی و مشتقات سرعت استفاده می‌شود. در این معادله‌ها هیچ گونه انتقالی برای تنش‌های رینولدزی در نظر گرفته نشده است. بنابراین، پیش‌بینی می‌شود که برای مدل‌های SMC که از معادله انتقال تنش‌های رینولدزی استفاده می‌کنند، خطای کمتری وجود داشته باشد. خطای زیاد در نزدیکی دیواره ناشی از شیب شدید سرعت در این محدوده بوده و همین امر مؤید این مطلب است که مدل‌های دو معادله‌ای، به دلیل استفاده از تغییرات سرعت، بیان قابل قبولی برای تنش‌های رینولدزی در نزدیکی دیواره ارائه نمی‌کنند. با این حال مدل  $k-\omega$ ، نسبت به مدل

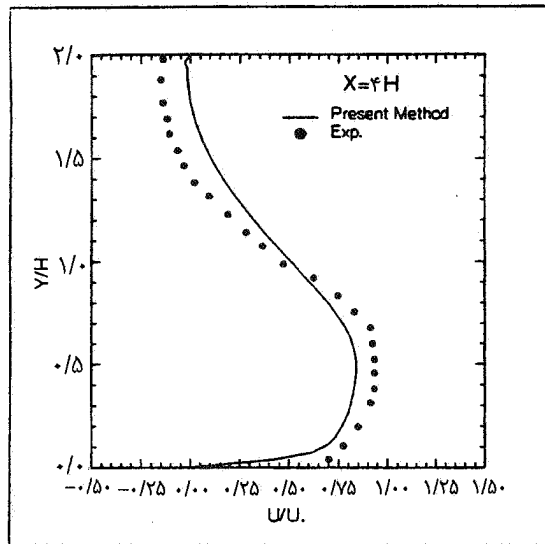
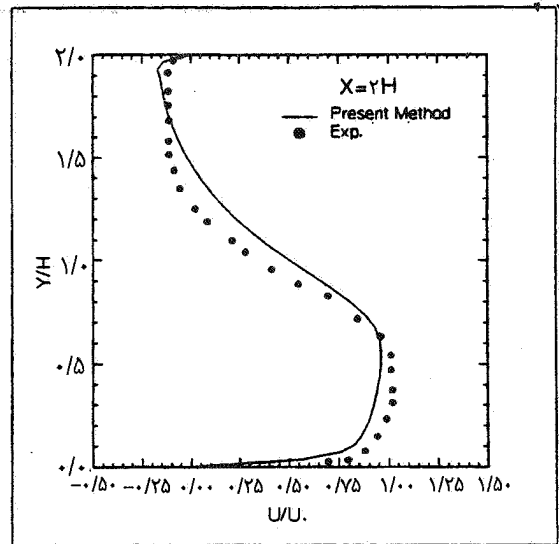
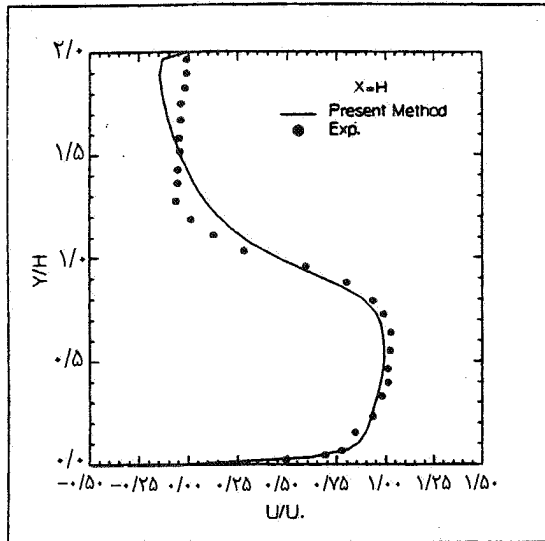




شکل ۴- توزیع سرعت و تنشهای رینولدزی در جریان بین دو صفحه موازی

غیرایزوتروپیک بودن درهمی در این ناحیه منسوب کرد [۱۴ و ۱۵]، درحالی که، در معادله‌ها از این فرض استفاده شده است. در مورد ناحیه گردابی می‌توان گفت که در ناحیه‌ای که تغییرات شدید سرعت وجود دارد، مدل استفاده شده نتایج بهتری را نشان می‌دهد [۳]. یکی از عوامل مهم اختلاف در نتایج را می‌توان نوسانات در سرعت ذکر کرد. نتایج تجربی نشان می‌دهند [۱۴] که اندازه نوسانات سرعت

پای پله در کانال نشان می‌دهد. نتایج موجود با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده‌اند [۱۳]. نتایج نشان می‌دهد که در ناحیه غیرگردابی جریان، هر چه از پای پله دورتر شویم، اختلاف نتایج بیشتر می‌شود، درحالی که در ناحیه گردابی به طور کلی اختلاف بیشتر بوده و در نواحی شروع و پایان ناحیه گرداب اختلاف افزایش می‌یابد. اختلاف بین نتایج در نواحی غیرگردابی را می‌توان به



شکل ۵- توزیع سرعت در سه مقطع مختلف در جریان در هم از روی یک پله و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی [۱۳]

جدیدترین تکنیکهای توصیه شده موجود در مراجع استفاده شد. با استفاده از برنامه تهیه شده چند مسئله نمونه شامل جریان آرام و درهم حل شده و نتایج با نتایج حاصل از کارهای عددی و تجربی دیگران مقایسه شد. سازگاری بسیار خوب این نتایج با نتایج دیگران، درحالی که در اینجا از شبکه درشت تری استفاده شده است، نشان می دهد که اجتماع تکنیکهای بالا در کنار یکدیگر در یک برنامه باعث شده است که کد حاصل در مدلسازی جریان در محیطهای با هندسه پیچیده توانمند باشد. اعمال اصلاحات لازم در این کد به منظور تعمیم آن به یک کد

تقریباً از درجه اهمیت سرعت متوسط است. همچنین وجود ناپایداری جریان از عواملی است که باعث دور شدن از صحت اعتبار فرض ایزوتروپ بودن شده [۱۵] و نهایتاً باعث اختلاف در جوابها در این محدوده می شود.

#### ۸- نتیجه گیری

با هدف دستیابی به یک کد رایانه ای قوی برای تحلیل جریانهای درهم دائم در نواحی دو بعدی با هندسه پیچیده از روش اجزای محدود استفاده شد. در حل عددی و مدلسازی درهمی از

سه بعدی و نیز برای ایجاد امکان تحلیل جریان در حجم کنترل‌های دوار هم اکنون در دست اقدام است که نتایج آن در مقاله‌های آتی ارائه خواهد شد.

#### ۹- تشکر و قدردانی

بدین وسیله مراتب تشکر خود را از معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی شریف، به دلیل حمایت مالی از این پروژه اعلام می‌داریم.

واژه نامه:

- |              |                 |                               |
|--------------|-----------------|-------------------------------|
| 1. frontal   | 4. perturbation | 7. quadrature upwind          |
| 2. segregate | 5. simple       | 8. streamline upwind          |
| 3. CALC      | 6. upwind       | 9. streamline petrov-Galerkin |

مراجع

۱. رامین رزمی، «ایجاد کد رایانه‌ای اجزای محدود برای حل مسائل جریان دائم درهم در محیط‌های دوبعدی با اشکال پیچیده»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، مرداد ۱۳۷۵.
۲. حسن محرابی، «استفاده از مدل‌های RSM و  $k-\epsilon$  برای محاسبات عددی حرارت و سیالات در محدوده‌های پیچیده»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، اسفند ۱۳۷۴.
3. Wilcox D. C., "Turbulence Modeling for CFD". DCW Industries, (1993).
4. COSMOS, "Flow Plus User's Guide", Finite Element CFD Solvers Solver, Version 2.0, (1996).
5. Davidson L., and Farhanieh B., "CALC- BFC" Publication 91/14 ISSN 1101-9972, Dept of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers university of Technology, Goteborg, Sweden, 1991.
6. Ramaswamy, B., and Jue, T. C., "Segregated Finite Element Formulation of Navier- Stokes Equations Under Laminar Conditions", Finite Elements in Analysis and Design, 9,257-270, (1991).
7. Yao M. and De Groh, H., "Three- Dimensional Finite Element Method Simulation of Bridgman Crystal Growth and Comparison with Experiments", Num. Heat Transfer, Part A, Vol.24,393-412, (1993).
8. Reddy, J. N., Reddy, M. P. and Akay H. U., "Penalty Finite Element Solution Algorithms", Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 100,169-205, (1992).
9. Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L., "Finite Element Method", Fourth Edition, Vol.2, Mc Graw Hill, (1991).
10. Ghia U., Ghia K.N. and Shin C.T., "High- Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and Multigrid Method", J. Comput. Phys., 48,387-411, (1982).
11. Armaly, B. F., Durst F., Pereira J.C.F. and Schonung B., "Experimental and Theoretical Investigation of Backward- Facing step Flow", J. Fluid Mech., 127,473-496. (1983).
12. Laufer J., "Investigation of Turbulent Flow in a 2- Dimensional Channel", NACA. Report 1053.
13. Obi S., Peric M. and Scheuerer G., "A Finite-Volume Calculation Procedure for Turbulent Flows with Second- Order Closure and Collocated Variable Arrangement", 7th Symp. Turbulent Shear Flow, Stanford University, 17,4.117.4.6, 1989.
14. Simpson R. L., "Turbulent Boundary Layer Separation", Ann. Rev. Fluid Mech. 21,205, (1989).
15. Thompson, B. E. and Whitelaw J.H., "Characteristics of Trailing- Edge Flow with Turbulent Boundary- Layer Separation", J. Fluid Mech., 157, 305, (1985).