

مسئله تعیین اندازه اقتصادی و ترتیب تولید با روش SA^۱

فریمه مخاطب رفیعی* و محمد معطر حسینی**

دانشکده مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۷/۱۹ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۷/۲/۲۱)

چکیده - این مقاله روشی در خصوص حل مسئله ELSP^۲ که در آن محصولات چندین بار و با اندازه‌های مختلف در یک سیکل روی یک ماشین با معیار حداقل کردن هزینه‌های نگهداری و آماده‌سازی تولید می‌شوند را ارائه می‌کند. مسئله به دلیل ماهیت ترکیبی آن که ناشی از تأثیر فرکانس، اندازه و ترتیب تولید هر محصول است از نوع Np-hard است و یافتن جواب بهینه آن با روشهای معمول مستلزم صرف وقت بسیار است. از روشهای جدید ابتکاری مناسب برای حل این نوع مسائل ترکیبی می‌توان از SA نام برد که تاکنون برای حل مسئله ELSP استفاده نشده است. در این مقاله علاوه بر بررسی چگونگی استفاده از SA برای این مسئله، اثرات تغییر فرکانس تولید بر ترتیب و اندازه تولید مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتیجه به دست آمده نشاندهنده کاهش هزینه است.

The Problem of Scheduling Several Products on A Single Facility with the Simulated Annealing Technique

F. Mokhatab-Rafiei and M. Moattar Hosaini

Department of Industrial Engineering, Isfahan University of Technology

Department of Industrial Engineering, Amirkabir University of Technology

ABSTRACT- This paper considers the Economic Lot Scheduling Problem, that is, the problem of scheduling several products on a single facility so as to minimize holding and setup costs. Combination of frequency and timing as well as production quantity make this problem Np-hard. A heuristic is developed to obtain a good solution to ELSP. The proposed heuristic makes use of the Simulated Annealing Technique. This heuristic gives a sharper upper bound to holding and setup costs.

** استادیار

* دانشجوی دکترا و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی اصفهان

مشکل و گاهی نیز ناممکن است.

بیشتر مطالعات بر پایه یک سیاست برنامه‌ریزی سیکلی بنا شده است و در آن برنامه به نحوی طراحی می‌شود که مرتباً تکرار می‌شود. با در نظر گرفتن این سیاست دو روش را می‌توان اتخاذ کرد. یکی استفاده از دوره پایه (BP)^۳ است که در آن سیکل هر محصول مضربی صحیح از این دوره پایه بوده و اگر محصول در سیکل بیش از یکبار تولید شود اندازه تولید آن مساوی خواهد بود. در این زمینه المغربي [۲] مرور کاملی را تا سال ۱۹۷۸ ارائه کرده است، او روش برنامه‌ریزی پویای خود را بر مبنای دوره پایه بنا کرده است. در این رابطه می‌توان از هسو [۳] و اکسستر [۴] نام برد. دیویس [۵] یک روش شمارش محدود را به صورت ترکیبی از یک بهینه‌سازی غیرخطی و روش ابتکاری ارائه کرده است.

روش دیگری که مطرح است انتخاب یک زمان سیکل T به عنوان دوره کلی سیستم است که در ابتدا توسط ماکسول [۶] بیان شده است. بعضی از محصولات ممکن است چندین بار در طول یک سیکل تولید شوند و همچنین تغییر در اندازه تولید هر محصول در سیکل نیز وجود داشته باشد و برنامه هر T واحد زمانی تکرار شود. از میان مقالاتی که بر اساس این روش بنا شده‌اند می‌توان از دویسون [۷] و گالکو [۸] نام برد. در این مقاله نیز از روش اخیر استفاده شده است.

این مقاله در هفت بخش مرتب شده است. در بخش (۲)، مسئله تعریف شده و فرمولبندی می‌شود. در بخش (۳) روش SA و مطابقت آن با مسائل بهینه‌سازی ترکیبی بررسی می‌شود و در بخش (۴) الگوریتم ابتکاری پیشنهادی مبتنی بر SA ارائه می‌شود. در بخش (۵) یک مثال عددی برای آزمون الگوریتم معرفی شده و در بخش (۶) چگونگی تعیین پارامترهای روش SA برای حل مثال بررسی و با استفاده از زبان پاسکال مسئله حل می‌شود. در بخش (۷) نتایج و پیشنهادات ارائه خواهند شد.

۲- فرمولبندی مسئله

مسئله ELSP می‌تواند به صورت زیر بیان شود. یک وسیله و I محصول متفاوت وجود دارند. اطلاعات لازم برای مسئله عبارت‌اند از:

$$i \text{ اندیس محصولات مختلف} \\ p_i \text{ نرخ ثابت تولید محصول } i \\ i = 1, 2, \dots, I$$

بیش از سی سال است که مسئله تعیین اندازه اقتصادی و ترتیب تولید چندین محصول بر روی یک ماشین واحد (ELSP) توسط تعداد زیادی از محققان مورد توجه و بررسی قرار گرفته است. این مسئله اولین بار توسط روجر [۱] مطرح شد. در این مسئله نرخ تقاضا ثابت است و تمام تقاضا باید بلافاصله تأمین شود. نرخ تولید نیز ثابت است. قبل از شروع هر محصول ممکن است که نیاز به آماده‌سازی باشد. نرخ هزینه نگهداری هر محصول ثابت بوده و آماده‌سازی نیز دارای هزینه است. معیار به دست آوردن اندازه و ترتیب تولید، متوسط هزینه آماده‌سازی و نگهداری است.

از دلایل توجه به ELSP را می‌توان کاربرد زیاد این مسئله در عمل و همچنین دشوار بودن حل آن برخلاف تشریح ساده آن ذکر کرد. پیچیدگی حل آن ناشی از ساختار مسئله است که به صورت یک مسئله غیرخطی با خصوصیات مسئله‌ای با ماهیت گسسته بیان می‌شود. در نتیجه بیشتر راه‌حلهای مؤثر این مسئله در مطالعات جدید بر مبنای روشهای ابتکاری است که اکثراً توجهی به مسئله امکانپذیری جواب نکرده‌اند. امکانپذیری مسئله با حفظ دو شرط زیر برقرار می‌شود:

۱- محدودیت ظرفیت: بار ماشین باید از ظرفیت آن تجاوز نکند. در غیراین صورت برنامه تولید حداقل دو محصول برای رسیدن به سطح تقاضای لازم با یکدیگر تداخل خواهند کرد.

۲- محدودیت نداشتن کمبود موجودی: یک برنامه ناممکن تولید، برنامه‌ای است که در آن لازم باشد برای دچار نشدن به کمبود موجودی برای یک محصول، قبل از اینکه نوبت تولید به آن برسد و درست همزمان با تولید محصول دیگری، تولید آن شروع شود. به عبارت دیگر اندازه تولید یک محصول باید برای مدت زمانی که طول می‌کشد تا مجدداً نوبت تولید آن شود، کافی باشد.

بسیاری از مقالات منتشر شده به نحو مناسبی محدودیت ظرفیت را در نظر گرفته‌اند ولی محدودیت دوم به دلیل بزرگ کردن ابعاد مسئله و دشوار کردن حل آن اکثراً نادیده گرفته شده است. وقوع کمبود موجودی تابعی از فرکانس تولید محصولات، نوبت تولید و میزان اندازه تولید آنهاست. واضح است که در نظر گرفتن هر سه این عوامل ترکیبهای زیادی را نتیجه می‌دهد که بر روی تمام آنها کار

$$t = (I - P^{-1}L)P^{-1}L(S + U) \quad (6)$$

که I ماتریس واحد با ابعاد $k \times k$ ، p ماتریس قطری $k \times k$ که عناصر آن $\frac{P_i f(k)}{d_{f(k)}}$ است و L ماتریس وقوع، ماتریسی با عناصر 0 و 1 و با ابعاد $k \times k$ است و S بردار k تایی از زمانهای آماده‌سازی و u بردار k تایی از زمانهای بیکاری است.

مجموع زمانهای بیکاری با تبدیل محدودیت دوم از رابطه (۳) و با استفاده از علائم جدید به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$\sum_{k=1}^n u^k = T - \sum_{i=1}^1 (m_i s_i + T \frac{d_i}{p_i}) \quad (7)$$

عبارت بالا را می‌توان به صورت نامساوی زیر نیز در نظر گرفت:

$$T \geq \frac{\sum_{i=1}^1 m_i s_i}{1 - \sum_{i=1}^1 \frac{d_i}{p_i}} \quad (8)$$

پس مدل مسئله ELSP به صورت حداقل کردن رابطه (۵) با محدودیت‌های ارائه شده در روابط (۶) و (۷) یا (۶) و (۸) تبدیل می‌شود. این مدل کاملاً معادل با حداقل کردن رابطه (۱) با محدودیت‌های ارائه شده در روابط (۲) و (۳) است.

۳- روش SA

روش جدیدی است که اخیراً برای حل تقریبی مسائل بهینه‌سازی ترکیبی دشوار مورد توجه قرار گرفته است. این روش بر پایه نظریه مکانیک آماری و مشابه با رفتار سیستمهای فیزیکی در دمای زیاد بنا شده است. یکی از خصوصیات مهم روش SA یافتن جوابها با کیفیت بالایی است که بستگی به جواب شروعی ندارد. بازپخت یک فرایند فیزیکی است که در آن به یک جسم جامد گرمای زیادی داده می‌شود تا به مایع تبدیل شود و سپس به آرامی دما را کاهش می‌دهند. سرعت سرد شدن در شکل نهایی جسم بسیار مؤثر است. آرام سرد شدن، شکل مناسبی به بلورهای جسم می‌دهد. اگر سیستم بالا در دمای تعادل دینامیکی مثلاً T قرار داشته باشد، در این صورت احتمال $\{ E = E(i) \}$ اینکه سیستم در یک حالت i قرار داشته باشد بستگی به انرژی $E(i)$ دارد. تعادل دینامیکی موضوع اصلی در مکانیک آماری است و

برقرار شود، بار ماشین بیش از اندازه در نظر گرفته شده است. برای ساده‌تر شدن مدل بالا، برای یک توالی مفروض f و با تعریف m_j به عنوان فرکانس تولید محصول m_i ، مدل زیر ارائه می‌شود. واضح است که برای $j \in F$ ، m_j مجموع تعداد موقعیتهایی است که در J_j نشان داده شده‌اند و در این صورت خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{i=1}^1 m_i A_i$$

به دنبال، از همین تبدیل در تمام موارد استفاده خواهد شد. لذا برای یک سیکل، هزینه کل آماده‌سازی برابر است با

$$\sum_{i=1}^1 m_i A_i$$

و هزینه کل نگهداری برابر است با

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^1 H_i \frac{T^2}{m_i} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n H_{f(k)} \left(\frac{t^k P_{f(k)}}{d_{f(k)}} \right)^2 \quad (4)$$

که در آن $f(k) = (f^1, f^2, \dots, f^k \dots f^K)$ توالی مفروض مورد نظر را نشان می‌دهد و $n = \sum_{i=1}^1 m_i$ مجموع دفعات تولید و یا به عبارتی مجموع تعداد دفعات آماده‌سازی است و $H_{f(k)}$ به گونه‌ای تعریف می‌شود که در آن

$$H_i = h_i d_i \left(1 - \frac{d_i}{p_i} \right)$$

است. بنابراین هزینه متوسط آماده‌سازی و نگهداری موجودی در واحد زمان برابر است با:

$$C = \frac{1}{T} \left[\sum_{i=1}^1 m_i A_i + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^1 H_i \frac{T^2}{m_i} \right] \quad (\text{ساده شده})$$

$$C = \left(\frac{1}{T} \right) \left[\sum_{i=1}^1 m_i A_i + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n H_{f(k)} \left(\frac{t^k P_{f(k)}}{d_{f(k)}} \right)^2 \right] \quad (5)$$

محدودیت‌های (۲) را می‌توان برای به دست آوردن زمانهای تولید به صورت زیر نوشت:

حالتی است که ذرات به طور تصادفی با یکدیگر تبادل انرژی می‌کنند. در این تبادل انرژی اگر ΔE اختلاف انرژی بین حالت جاری و حالت قبلی منفی باشد در این صورت ذرات به سطح انرژی پایینتر می‌روند و اگر ΔE مثبت باشد احتمال قبول آن سطح انرژی برابر با $\exp(-\Delta E / KT)$ است که K مقداری ثابت و T دمای ثابت است. تشابه بین مسائل بهینه‌سازی ترکیبی و مسئله تعیین پایتترین سطح انرژی در یک سیستم فیزیکی با ذراتی که در حال مبادله انرژی هستند اولین بار توسط کریک پاتریک [۹] مشاهده شده است و بر پایه این تشابه روش SA ایجاد شده است. از این روش اخیراً به عنوان یکی از بهترین راه حلها برای مسائل بهینه‌سازی ترکیبی یاد می‌شود. روش SA را می‌توان به صورت زیر تشریح کرد. در ابتدا به پارامتر کنترل C یک مقدار بالا داده می‌شود. حالت x (یک جواب شروعی اولیه) انتخاب شده است و جواب دیگری مثل y به طور تصادفی در همسایگی x انتخاب می‌شود. فرض کنید که $C(x,y) = C(x) - C(y)$ تغییر در هزینه ناشی از این انتخاب است. در این صورت اگر $C(x,y) < 0$ باشد با احتمال $\exp\{-C(x,y)/c\}$ جواب پذیرفته می‌شود ولی اگر $C(x,y) \geq 0$ باشد جواب با احتمال یک پذیرفته می‌شود. پارامتر کنترل به تدریج کم می‌شود تا سیستم به یک تعادل که معادل با جواب بهینه است برسد. این فرایند به بیان دقیقتر "برنامه سرد شدن" نامیده می‌شود. بنابراین کاربرد این روش در مسائل بهینه‌سازی خاص نیاز به طراحی مراحل زیر دارد:

- ۱- شناخت اولیه مسئله و یافتن یک جواب اولیه
- ۲- چگونگی به دست آوردن جوابهای همسایگی
- ۳- انتخاب یک تابع هزینه مناسب
- ۴- تعریف یک برنامه سرد شدن شامل دمای اولیه، قاعده‌ای برای تغییر دادن دما و مدت جستجو در هر دما.

۱-۳ الگوریتم اولیه SA

دستورالعمل زیر الگوریتم اولیه SA است [۱۰]:
 قدم ۱- S یک جواب شروعی اولیه را انتخاب کنید.
 قدم ۲- یک دمای اولیه $T > 0$ انتخاب شود.
 قدم ۳- در حالی که هنوز "سرد نشده" است به صورت زیر ادامه دهید:

قدم ۱-۳ حلقه زیر را L دفعه تکرار کنید.
 قدم ۱-۳-۱ یک جواب همسایگی را به طور تصادفی انتخاب کن S'
 قدم ۲-۱-۳ $\Delta = C(S') - C(S)$
 قدم ۳-۱-۳ اگر $\Delta \leq 0$ (حرکت به طرف پایین) پس $S=S'$
 قدم ۳-۱-۴ اگر $\Delta > 0$ (حرکت به طرف بالا) با احتمال $\exp(-\Delta/T)$ پس $S=S'$
 قدم ۲-۳ دما را کاهش دهید. $T = rT$ (r عددی دلخواه و کوچکتر از یک است)
 قدم ۴- S را حفظ کرده به قدم ۱ برگردید.

۲-۳ الگوریتم اصلاح شده

در الگوریتم اولیه SA اصلاحاتی صورت داده می‌شود. اولاً همواره بهترین جواب نگهداری شده و دو شمارنده TOTAL و ACCEPT استفاده می‌شوند که مجموع تعداد تکرارها و تعداد جوابهای پذیرفته شده در یک دما را نگه می‌دارند. این دو در شروع هر تکرار در یک دمای جدید، صفر می‌شوند. COUNT شماره سرد شدن است. این شمارنده تعداد مراحل را که نسبت $\frac{ACCEPT}{TOTAL}$ کمتر از PERCENT می‌شود، می‌شمارد PERCENT نقاط قبول شده به کل نقاط تولید شده در یک دماست. یکی از سه حالت زیر در هر دما اتفاق می‌افتد:

اگر $C(S') \leq C(S)$ باشد.

در این صورت

الف - $S = S'$ نگهداری می‌شود.

ب - به ACCEPT یکی اضافه می‌شود.

مجموعه جوابهای پذیرفته شده کنترل می‌شود تا

مشخص شود که آیا تا این لحظه S' بهترین جواب

است. اگر S' بهترین جواب به دست آمده باشد.

در این صورت

الف - S' حفظ شود.

ب - COUNT شمارنده در هر دما صفر می‌شود

ج - به TOTAL یکی اضافه می‌شود.

در غیر این صورت به TOTAL یکی اضافه می‌شود و با S الگوریتم شروع می‌شود.

در غیر این صورت

فعالاً S' انتخاب نمی‌شود. $\Delta = \frac{C(s') - C(s)}{C(s)}$ محاسبه

می‌شود. احتمال پذیرش یک جواب $P = \exp(-\Delta/T)$ است. یک عدد تصادفی U که به طور یکنواخت بین صفر و

یک قرار دارد تولید می‌شود. اگر $U \leq P$ باشد.

در این صورت

الف - جواب به دست آمده پذیرفته می‌شود.

ب - به ACCEPT یکی اضافه می‌شود.

ج - به TOTAL یکی اضافه می‌شود.

در غیر این صورت

جواب پذیرفته نمی‌شود. جواب S نگهداشته شده به

TOTAL یکی اضافه می‌شود.

اگر ACCEPT بزرگتر از n باشد و یا وقتی TOTAL بزرگتر از

$Z \times n$ باشد، تکرارها در یک دما پایان می‌گیرند. n تعداد مراحل

تغییر دما و Z عددی صحیح است که مقدارشان به دست خواهد

آمد. نامساوی اول تعداد جوابهای پذیرفته شده و نامساوی دوم حد

بالای تکرارها در یک دما را کنترل می‌کند. بعد از اینکه تکرارها در

یک دما به پایان رسید، PERCENT یعنی درصد جوابهای

پذیرفته شده محاسبه می‌شود. اگر درصد کمتر از یک مقدار تعیین

شده باشد، به COUNT یکی اضافه می‌شود. این کار به این علت

است که شانس جایگذاری بهترین جواب از بین رفته و لذا شمارنده

سرد شدن یک قدم به سمت مقدار پایانی خود افزایش می‌یابد.

۴- روش ابتکاری بر پایه SA

همان طور که بیان شد برای حل مسئله ELSP از روش SA

اصلاح شده استفاده خواهد شد. در شروع باید یک جواب شروعی

اولیه را به دست آورده و نحوه ایجاد جوابهای در همسایگی نیز

مشخص شود.

۴-۱ روش ساختن توالی اولیه

به هر محصول یک عدد تصادفی با توزیع یکنواخت بین ۱ و K

نسبت داده می‌شود. این عدد تعداد تکرار محصول مورد نظر در

سیکل کاری است. مراحل زیر برای رسیدن به یک توالی دنبال می‌شود.

قدم ۱- محصولات برحسب تعداد تکرار را به صورت شروعی

مرتب کنید.

قدم ۲- محصولات با همان ترتیبی که در قدم ۱ به دست آمد

کنار هم قرار دهید.

از عدد تکرار هر محصول یکی کم کنید و محصولاتی که

دارای عدد تکرار باقیمانده غیر صفرند با همان ترتیب کنار

توالی قبلی قرار دهید. این کار را آن قدر تکرار کنید تا عدد

تکرارها صفر شوند. توالی آماده است.

قدم ۳- توالی به دست آمده را بررسی کنید اگر یک محصول

بدون واسطه چند دفعه پشت سرهم تکرار شده باشد

یکی از آنها را نگه داشته و بقیه را حذف کنید.

به عنوان مثال، سه محصول A و B و C را در نظر بگیرید. اگر

اعداد تکرار این سه محصول ۳ و ۴ و ۲ باشند در قدم ۱،

C و A و B ترتیب نزولی برحسب عدد تکرار به دست می‌آید.

عدد تکرار توالی (از سمت چپ)

C A B ۲ و ۳ و ۴

C A B C A B ۱ و ۲ و ۳

C A B C A B A B ۰ و ۱ و ۲

C A B C A B A B B ۰ و ۰ و ۱

همان طور که در توالی بالا مشخص است محصول B دو بار

پشت سرهم تکرار شده است با توجه به روش پیشنهادی بالا یکی

از B ها حذف شده و توالی شروعی به صورت زیر نهایی می‌شود.

C A B C A B A B

۴-۲ نحوه ایجاد جوابهای در همسایگی

برای به دست آوردن جواب در همسایگی به صورت تصادفی

یکی از محصولات را انتخاب کرده و عدد تکرار جدیدی بین ۱ و K

برای آن به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و مجدداً با روش قبلی،

توالی جدیدی به دست می‌آید.

۴-۴ معرفی پارامترهای تصمیم‌گیری در روش

پیشنهادی SA

در این روش هشت پارامتر تعریف می‌شوند که با تعیین آنها می‌توان از سرعت رسیدن به جواب نهایی و قابلیت اطمینان آن مطمئن شد. این پارامترها عبارت‌اند از:

T دمای اولیه

T₀ دمای انجماد

هر گاه مقدار T از این مقدار کمتر شود الگوریتم متوقف

می‌شود.

g ضریب تغییر دما

ضریبی است که هر دفعه در مقدار دما ضرب شده و مقدار آن را

کاهش می‌دهد. رابطه T و T₀ و g به صورت زیر است. n در این

رابطه تعداد مراحل تغییر دماست.

$$T_0 = g^n T$$

y = حد بالایی عدد تکرار

اگر q_i عدد تکرار محصول نام باشد.

$$q_i = U(1, y)$$

TOTAL کل نقاط تولید شده در یک دما

ACCEPT کل نقاط قابل قبول در یک دما

PERCENT نسبت نقاط قابل قبول به کل نقاط تولید شده در

یک دما

COUNT تعداد مراحل که در یک دما نسبت $\frac{ACCEPT}{TOTAL}$ کمتر

از PERCENT می‌شود.

از بین پارامترهای بالا، Y بر توزیع نقاط قابل دسترس مسئله اثر دارد

که با تغییر آن مقدار q_i تغییر می‌کند و طول سیکل عوض می‌شود.

پارامترهای T و T₀ و g در رابطه با احتمال پذیرش جواب بد هستند

با تغییر اینها انعطاف‌پذیری و پویایی الگوریتم تغییر می‌کند. چهار

پارامتر آخر TOTAL، ACCEPT، PERCENT و COUNT بر

محدوده قابل دسترس مسئله اثر می‌گذارند و با تغییر آنها تعداد نقاط

بررسی شده تغییر می‌کنند. اگر مقدار این چهار

۴-۳ چگونگی حل مدل و یافتن جواب شروعی

مدل ELSP در بخش (۲) معرفی شده است. مراحل زیر چگونگی

دستیابی به جواب شروعی و همچنین یافتن هزینه مربوط به گزینه را در

پیشبرد الگوریتم نشان می‌دهد. برای اینکه T طول سیکل با دما در روش

SA اشتباه نشود از این به بعد از CYCLE به جای T استفاده خواهد شد.

الف - با مشتق‌گیری از رابطه تابع هدف ساده شده مقدار (Cycle)*

به دست می‌آید.

$$(Cycle)^* = \left(\frac{\sum_{i=1}^I m_i A_i}{\sum_{i=1}^I H_i / m_i} \right)^2$$

ب - (Cycle)_{min} را از رابطه زیر به دست آورید:

$$(Cycle)_{min} = \frac{\sum_{i=1}^I m_i S_i}{1 - \sum_{i=1}^I d_i / P_i}$$

ج - (Cycle) = max [(cycle)*, (cycle)_{min}]

د - u^k را به دست آورید. زمان بیکاری برای همه محصولات به

جز آنهایی که در شروع توالی قرار گرفته‌اند مثبت و مساوی در نظر

گرفته می‌شود. اگر محصول در شروع توالی قرار دارد.

$$u^k = \begin{cases} \left[Cycle - \sum_{i=1}^I (m_i S_i + (Cycle) d_i / P_i) \right] / n \\ 0 \end{cases}$$

در غیراین صورت

ه - زمانهای تولید، t را از رابطه زیر به دست آورید:

$$t = (I - P_{-1} L) P^{-1} L (S + u)$$

و - هزینه را برای این توالی از رابطه زیر به دست آورید:

$$C = \left(\frac{1}{cycle} \right) \left[\sum_{i=1}^I m_i A_i + \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^n H_{f(k)} \left(\frac{t^k p_{f(k)}}{d_{f(k)}} \right)^2 \right]$$

توجه شود که f_k توالی به دست آمده از الگوریتم (۴-۱) است.

جدول ۱ - مثال عددی بر پایه مسئله بامبرگر

محصول	هزینه آماده‌سازی \$	هزینه نگهداری روزانه \$	نرخ تولید روزانه	نرخ تقاضا روزانه	زمان آماده‌سازی (ساعت)
۱	۱۵	۰/۰۰۰۶۵	۳۰۰۰۰	۴۰۰	۱
۲	۲۰	۰/۰۱۷۷۵	۸۰۰۰	۴۰۰	۱
۳	۳۰	۰/۰۱۲۷۵	۹۵۰۰	۸۰۰	۲
۴	۱۰	۰/۰۱۰۰۰	۷۵۰۰	۱۶۰۰	۱
۵	۱۱۰	۰/۲۷۸۵۰	۲۰۰۰	۸۰	۴
۶	۵۰	۰/۰۲۶۷۵	۶۰۰۰	۸۰	۲
۷	۳۱۰	۰/۱۵۰۰۰	۲۴۰۰	۲۴	۸
۸	۱۳۰	۰/۵۹۰۰۰	۱۳۰۰	۳۴۰	۴
۹	۲۰۰	۰/۰۹۰۰۰	۲۰۰۰	۳۴۰	۶
۱۰	۵	۰/۰۰۴۰۰	۱۵۰۰۰	۴۰۰	۱

ممکن مسئله محدود شود و با استفاده از کمترین جستجو در فضای دامنه به جواب نهایی رسید.

معیارهای پذیرش یک مقدار خاص برای پارامترها عبارت‌اند از:

۱- بیشترین تعداد جواب نهایی که مسئله در ۳۰ بار حل به آن رسیده است.

۲- کمترین تعداد نقاط بررسی شده در فضای قابل دسترس

بعد از آنکه محدوده قابل قبول برای $y=3$ به دست آمد به بررسی حالت‌های و ۵ و $y=4$ پرداخته خواهد شد.

۶-۱ محدوده تغییر دما و قاعده‌ای برای تغییر دما

برای به دست آوردن مقدار T و T_0 و g از روش سعی و خطا استفاده خواهد شد. در ابتدا مقدار $g = 0/9$ در نظر گرفته شده و در حالت‌های مختلفی از T و T_0 مسئله حل شد. نتیجه در جدول (۲) مشاهده می‌شود. با توجه به تعداد جواب نهایی، همه تعداد محدوده‌هایی که در هر ۳۰ نوبت حل مسئله به جواب نهایی رسیده‌اند را می‌توان قبول کرد. لذا تحلیل بیشتری برای تصمیم‌گیری لازم است.

فرض می‌شود که C مقدار تابع هدف در نقطه اول و C' مقدار آن در نقطه دوم باشد و همچنین فرض می‌شود که $C' > C$ است. Δ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = \frac{C' - C}{C}$$

پارامتر به نحوی عوض شوند تعداد نقاط قابل دسترس کم شوند ممکن است به جواب نهایی دست یافته نشود و در حالت دیگر نیز اگر تعداد نقاط قابل دسترس زیاد شوند ممکن است برای رسیدن به جواب، زمان زیادی وقت صرف شود.

۵- ارائه یک مثال عددی

الگوریتم‌های تعیین اندازه تولید معمولاً با مسائلی که اولین بار توسط بامبرگر [۱۱] حل شده‌اند مقایسه می‌شوند. سه نوع مسئله که توسط بامبرگر با استفاده از اطلاعات پایه‌ای مشترک ارائه شده‌اند دارای نرخ تقاضای ضرب شده در یک ضریب $a_1 = 1$ یا $a_2 = 3$ و یا $a_3 = 4$ هستند. چون نرخ تقاضای بالاتر، ظرفیت بیشتری را نیاز دارد و در نتیجه برنامه‌ریزی آن دشوارتر می‌شود لذا مبنای مقایسه در این بحث تقاضا با ضریب $a_3 = 4$ قرار گرفته است. اطلاعات مربوط به مسئله سوم در جدول (۱) مشاهده می‌شود.

۶- تعیین پارامترهای تصمیم‌گیری

در ابتدا مسئله با $y=3$ با مقادیر مختلف برای سایر پارامترها حل شده و با سعی و خطا یک محدوده تقریبی به دست آمده است. سپس در حالتی که تصور می‌شود مسئله با کمترین محدودیت روبرو است با سری تصادفی با مولد 123947 ، ۳۰ بار مسئله حل شده است و بهترین جواب حاصل به عنوان جواب مسئله در نظر گرفته شده است. سپس با تغییر پارامترها سعی خواهد شد تا جای

جدول ۲- نتایج حاصل در حالت $g = 0/9$

محدوده دما	تعداد جوابهای نهایی در ۳۰ بار حل	تعداد نقاط جستجو
۱۰۰-۰/۰۵	۲۹	۶۷۳
۲۰-۰/۰۵	۲۰	۶۵۸
۲۰-۰/۰۱	۲۷	۹۹۴
۱۰-۰/۰۵	۱۷	۵۹۳
۱۰-۰/۰۱	۳۰	۸۸۹
۵-۰/۰۱	۳۰	۸۰۰
۲-۰/۰۱	۳۰	۷۰۰
۱-۰/۰۱	۳۰	۶۳۰
۰/۵-۰/۰۱	۳۰	۶۲۰
۰/۰۵-۰/۰۰۳	۳۰	۱۱۷۰
۰/۰۵-۰/۰۰۱	۳۰	۸۰۰
۰/۰۰۵-۰/۰۰۰۳	۲۷	-

جدول ۳- رابطه بین Δ و T با احتمال رد شدن جواب بد

	۱۰۰	۷۵	۵۰	Δ ۲۰	۵	۱	T
	۰/۰۹۵	۰/۰۷۲	۰/۰۴۹	۰/۰۲۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۱	۱۰
	۰/۱۸۱	۰/۱۳۹	۰/۰۹۵	۰/۰۳۹	۰/۰۱۰	۰/۰۰۲	۵
	۰/۳۹۳	۰/۳۱۳	۰/۲۲۱	۰/۰۹۵	۰/۰۲۵	۰/۰۰۵	۲
	۰/۶۳۲	۰/۵۲۸	۰/۳۹۳	۰/۱۸۱	۰/۰۴۹	۰/۰۱۰	۱
	۰/۸۶۵	۰/۷۷۷	۰/۶۳۲	۰/۳۳۰	۰/۰۹۵	۰/۰۲۰	۰/۵
	۱	۱	۱	۰/۹۸۲	۰/۶۳۲	۰/۱۸۱	۰/۰۵
	۱	۱	۱	۰/۹۹۹	۰/۸۱۱	۰/۲۸۳	۰/۰۳
	۱	۱	۱	۱	۰/۹۹۳	۰/۶۳۲	۰/۰۱
	۱	۱	۱	۱	۱	۰/۹۶۴	۰/۰۳
	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰/۰۰۱

از طرفی اگر احتمال رد شدن جواب بد، P باشد. با توجه به الگوریتم و شرط

رد شدن جواب بد می توان نوشت:

$$P(U < \exp(-\Delta/T)) = \int_{-\infty}^{\exp(-\Delta/T)} f(u) du \quad (ii)$$

$$P(U > \exp(-\Delta/T)) = P$$

با توجه به روابط (i) و (ii) خواهیم داشت:

$$1 - \int_{-\infty}^{\exp(-\Delta/T)} f(u) du = 1 - \exp(-\Delta/T) = P$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$1 - P(U \leq \exp(-\Delta/T)) = P \quad (i)$$

پس احتمال پذیرش جواب بد برابر با $1-P$ است. در جدول (۳)

جدول ۴- چگونگی انتخاب g

تعداد نقاط بررسی شده	تعداد جواب نهایی قابل قبول	n	g
-	۳۰	۳۹۰	۰/۹۹
-	۳۰	۷۸	۰/۹۵
۳۷۵	۳۰	۳۸	۰/۹
۴۷۰	۳۰	۲۴	۰/۸۵*
۳۴۶	۲۹	۱۸	۰/۸
۲۱۲	۳۰	۱۱	۰/۷۵
۱۵۵	۲۹	۸	۰/۶
۱۱۵	۲۸	۶	۰/۵

* مقدار انتخاب شده

با مقادیر مختلف برای پارامتر g و سایر محدودیتهای بحث شده، انتخاب نهایی صورت می‌گیرد. که نتیجه در جدول (۴) مشاهده می‌شود. با توجه به جدول (۴) مقدار g برابر ۰/۸۵ انتخاب می‌شود.

۶-۲ تعیین محدوده فضای قابل بررسی

چهار پارامتر فضای TOTAL، ACCEPT، PERCENT و COUNT فضای جواب را محدود می‌سازند. در ابتدا مقدار قابل قبول یکی را ثابت در نظر گرفته بقیه به دست می‌آیند و سپس به انتخاب پارامترهای دیگر پرداخته می‌شود. در این جا هدف کم کردن تعداد نقاط بررسی شده توسط برنامه است. چنانچه با استفاده از کمترین نقاط در فضای مسئله به جواب مورد نظر دست یافته شود می‌توان:

۱- به تعیین حد بالای پارامتر TOTAL پرداخت. این پارامتر تعداد نقاط بررسی شده در یک دمای خاص را می‌شمارد. جدول (۵) چگونگی انتخاب پارامتر TOTAL را نشان می‌دهد.

۲- برای تعیین مقدار ACCEPT، پارامتر TOTAL برابر با ۲۰ قرار داده می‌شود. مسئله حل می‌شود سپس با تغییر ACCEPT نتایج بررسی خواهند شد. جدول (۶) نتایج را نشان می‌دهد.

رابطه بین Δ و T با احتمال رد شدن جواب بد نشان داده می‌شود (اعداد داخل جدول احتمال رد شدن جواب بد هستند). با توجه به بحث قبلی و نتایج مشهود در جدول (۳)، محدوده دمای ۰/۰۰۱-۰/۰۵ انتخاب می‌شود. در این حالت احتمال رد شدن جواب بد در حدود ۱۸٪ تا ۱۰۰٪ قرار می‌گیرد.

برای تعیین پارامتر g در ابتدا رابطه آن را با سایر پارامترها بررسی کرده و سپس با روش سعی و خطا مقدار آن تعیین خواهد شد.

$$T_0 = g^n T$$

در رابطه بالا n تعداد مراحل تغییر دماست. با گرفتن لگاریتم از رابطه بالا خواهیم داشت.

$$\ln T_0 = n \ln g + \ln T$$

$$n = \frac{\ln T_0 - \ln T}{\ln g}$$

با توجه به حدود به دست آمده خواهیم داشت:

$$n = \frac{-3/91}{\ln g}$$

جدول ۵- چگونگی انتخاب پارامتر TOTAL

TOTAL	تعداد جواب نهایی	تعداد نقاط جستجو شده
۵۰	۳۰	۸۱۰
۲۵	۳۰	۲۶۰
۲۰*	۳۰	۲۱۵
۱۶	۲۹	۱۷۵
۱۲	۲۷	۱۳۵

* مقدار انتخاب شده

جدول ۶- چگونگی انتخاب پارامتر ACCEPT

ACCEPT	تعداد جواب نهایی	تعداد نقاط جستجو شده
۲۰	۳۰	۲۱۳
۱۰	۳۰	۲۱۰
۸*	۳۰	۲۰۸
۷	۲۹	۲۰۵

* مقدار انتخاب شده

جدول ۷- چگونگی انتخاب پارامتر COUNT

COUNT	تعداد جواب نهایی	تعداد نقاط جستجو شده
۱۵	۳۰	۴۷۵
۱۰	۳۰	۴۷۵
۵	۳۰	۴۰۵
۳*	۳۰	۳۵۰

* مقدار انتخاب شده

۳-۶ قانون توقف

پارامترهای PERCENT و COUNT به یکدیگر وابسته اند. با افزایش PERCENT سرعت تغییر COUNT زیاد می شود. در حالت $y = 3$ چون تعداد نقاط قابل قبول زیاد است تغییر پارامتر PERCENT تأثیری در مسئله ندارد لذا مقدار آن به دلخواه برابر با ۲۵ انتخاب می شود. اگر مقدار PERCENT از ۵۰ بیشتر شود

الگوریتم به طور ناگهانی متوقف می شود، این حالت معادل با یکباره سرد شدن است. پارامتر COUNT به همراه T باعث قطع الگوریتم می شوند و اگر مقدار آن خیلی کم شود مسئله کارایی خود را از دست می دهد. جدول (۷) چگونگی انتخاب COUNT را نشان می دهد. حد پایین پارامتر مقدار ۳ خواهد بود.

جدول ۸- پارامترهای انتخابی در حالت $Y \geq 3$

تعداد محصول موجود در سیکل	تعداد نقاط بررسی شده	COUNT	PERCENT	ACCEPT	TOTAL	g	T ₀	T	Y
۱۴	۳۴۰	۳	۲۵	۸	۲۰	۰/۸۵	۰/۰۰۱	۰/۰۵	۳
۲۰	۷۲۰	۵	۲۰	۱۰	۲۰	۰/۹	"	"	۴
۲۷	۲۸۷۰	۱۵	۱۰	۲۰	۷۰	۰/۹	"	"	۵
۳۴	۳۱۰۰	-	-	-	-	-	"	"	۶

۶-۴ انتخاب نهایی

بعد از اینکه مقدار پارامترهای مسئله در حالت $Y=3$ تعیین شدند با استفاده از محدوده حاصل و تغییر آن مقدار پارامترها برای حالت‌های و ۵ و $Y=4$ به دست آمده است. نتیجه در جدول (۸) نشان داده شده است.

چون تعداد نقاط جستجو شده در حالت $Y=5$ و $Y=6$ در حدود ۹ برابر بیشتر از حالت $Y=3$ است و طول سیکل بیش از ۲ برابر حالت $Y=3$ است. زمان حل مسئله در حدود ۱۵ برابر بیشتر از حالت $Y=3$ است به همین خاطر به کوچکترین محدوده‌ای که بیش از ۵۰٪ اوقات به جواب نهایی برسد اکتفا شده است.

برای به دست آوردن مقدار Y ، جواب نهایی مسئله در حالت‌های ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ به دست آمده است و با توجه به متوسط هزینه سالیانه مقدار $Y=5$ انتخاب شده است. در $Y=5$ جواب نهایی کمترین هزینه را دارد. در جدول (۹) جواب‌های نهایی برای حالت‌های بالا ارائه شده‌اند.

۷- نتیجه گیری

در صورت حل مستقل (IS) مسئله تعیین اندازه تولید برای هر یک از این ۱۰ محصول، حداقل هزینه و زمان سیکل اختصاصی به دست می‌آید. روابطی که استفاده خواهند شد به قرار زیرند:

$$T_i^* = \left(\frac{2A_i}{h_i d_i} \left(1 - \frac{d_i}{P_i} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (i)$$

$$C_i^* = \left(\frac{2A_i h_i d_i}{P_i} \left(1 - \frac{d_i}{P_i} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (ii)$$

$$\sigma_i^* = S_i + \left(\frac{d_i}{P_i} \right) T_i \quad (iii)$$

زمان سیکل بهینه با حداقل کردن هزینه‌های نگهداری و

آماده‌سازی از رابطه (i) به دست می‌آید و رابطه (ii) نیز این حداقل هزینه را نشان می‌دهد. مدت زمانی که مقدار تولید شده از هر محصول باید در آن مصرف شود در رابطه (iii) آورده شده است. نتایج اعمال روش IS برای مثال عددی در جدول (۱۰) مشاهده می‌شود.

از جدول (۱۰) نتیجه می‌شود که حد پایین هزینه سالیانه ۴۸۹/۵۹ دلار است. سؤال این است که آیا این الگوی سیکلی امکانپذیر است. اگر پاسخ مثبت باشد در این صورت IS حل بهینه است. در حالت کلی شرط لازم برای امکانپذیری به صورت زیر است.

$$\sum_{i=1}^I \sigma_i / T_i \leq 1$$

برای IS این شرط صادق نیست یعنی

$$\sum_{i=1}^I \sigma_i / T_i = 1/27$$

از طرف دیگر سیکلهای مستقل نیز امکانپذیر نیستند و کمبود موجودی حداقل برای محصول چهارم طبق رابطه زیر رخ خواهد داد:

$$\sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_9 = 0/46 + 0/51 + 0/928 = 1/895 > T^* \quad \varphi$$

لذا باید به دنبال جواب‌های دیگری با حداقل هزینه که امکانپذیرند بود. علت قابل قبول نبودن روش IS همین نادیده گرفتن شرط لازم برای امکانپذیری است. البته این مشکل با استفاده از ضرایب لاگرانژ برطرف می‌شود [۱۲].

همان طور که قبلاً بحث شد یکی از راهها در ELSP که امکانپذیری را تضمین می‌کند استفاده از زمان سیکل مشترک است.

جدول ۹- الف جوابهای نهایی در حالت مختلف

هزینه سیکل	زمان سیکل	تعداد محصولات در هر سیکل	کل نقاط جستجو شده	تعداد نقاط انتخاب شده	y
۱۰۹۲/۷	۱۳/۴۷	۱۴	۱۰۷۹	۲۶۲	۳
۱۰۲۲/۷۹	۱۹/۸۴	۲۰	۱۰۸۶	۲۳۰	۴
۱۰۰۸/۸۷	۲۶/۵۸	۲۷	۱۰۷۷	۲۵۵	۵*
۱۰۱۰/۳۴	۳۳/۳۱	۳۴	۱۰۷۹	۲۳۷	۶
۱۰۱۹/۶۸	۳۸/۹۸	۳۹	۱۰۶۶	۲۹۶	۷
۱۰۱۰/۳۴	۳۳/۳۱	۳۴	۱۰۷۸	۲۶۸	۸

* مقدار انتخاب شده

جدول ۹- ب جواب نهایی در حالات مختلف

توالی	y
۲۳۴۸۵۶۷۱۹۱۰۲۳۴۸	۳
۲۳۴۸۵۹۷۱۶۱۰۲۳۴۸۵۹۲۳۴۸	۴
۲۳۴۸۵۹۱۰۱۶۷۲۳۴۸۵۹۱۰۲۳۴۸۵۹۲۳۴۸	۵*
۲۳۴۸۵۹۱۰۱۶۷۲۳۴۸۵۹۱۰۲۳۴۸۵۹۱۰۲۳۴۸۵۹۲۳۴۸	۶
۲۴۸۵۳۹۱۰۱۶۷۲۴۸۵۳۹۱۰۲۴۸۵۳۹۱۰۲۴۸۵۳۹۲۴۸۵۳۹۲۴۸	۷
۲۳۴۸۵۹۱۰۱۶۷۲۳۴۸۵۹۱۰۲۳۴۸۵۹۱۰۲۳۴۸۵۹۲۳۴۸	۸

* مقدار انتخاب شده

هر محصول بتواند بیش از یکبار در هر سیکل تولید شود به مراتب کمتر از حالت ساده سیکل مشترک است. به عبارتی ادغام تعیین اندازه تولید و تعیین توالی منجر به جوابهای بهتری شده است. البته مشاهده می شود که اگر y حد بالای تعداد دفعه ای که هر محصول می تواند در هر سیکل تولید شود برابر ۵ باشد، هزینه، حداقل مقدار خود را خواهد داشت.

در رابطه با کاربرد این روش در عمل می توان گفت که بزرگ بودن y باعث طولانیتر شدن سیکل می شود و در شرایطی که محیط برنامه ریزی پویا باشد باید طول سیکل کوتاه باشد. به عبارتی انتخاب نهایی بین مقادیر ۲ و ۳ و ۴ و ۵ مشروط بر چگونگی محیط برنامه ریزی است.

در انتها می توان نتایج زیر را ارائه کرد

۱- روش SA روش مناسبی برای حل مسئله ELSP است.

در این روش $T_1 = T_2 = \dots T_1 = T^*$ است. با استفاده از رابطه زیر سیکل مشترک به دست می آید:

$$T^* = \left(\frac{\sum A_i}{\sum h_i d_i (1 - d_i/p_i)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

حل مثال با روش زمان سیکل مشترک که هر محصول در هر سیکل یکبار فقط تولید شود منجر به هزینه ۱۳۱۱/۰۸ دلار می شود که حد بالای هزینه سالیانه است. زمان سیکل مشترک نیز ۱۰/۶۳ روز است.

بحث مطرح شده در مباحث قبلی بر مبنای تلفیقی از تعیین اندازه تولید و زمان سیکل و تعیین توالی انجام کارها بوده و هدف نیز رسیدن به یک حد بالای بهتر است. همان طور که در جدول (۹) مشاهده می شود هزینه در حالت استفاده از سیکل مشترک که در آن

جدول ۱۰- نتایج حل مستقل مسئله تعیین اندازه تولید برای مثال

محصول	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	جمع
T_i^* (روز)	۱۰/۸۱	۲/۴۳	۲/۵۳	۱/۲۶	۳/۲	۶/۸۸	۱۳/۱۹	۱/۳	۳/۹۷	۲/۵۳	-
σ_i	۰/۱۸۵۸	۰/۱۶۳	۰/۲۹۶	۰/۳۱	۰/۲۹	۰/۱۷۵	۰/۴۶	۰/۵۱	۰/۹۲۵	۰/۱۰۹	۳/۴۲۴
C_i	۲/۷۷	۱۶/۴۲	۲۳/۶۷	۱۵/۸۷	۶۸/۵۹	۱۴/۵۳	۴۷	۱۹۶	۱۰۰/۷۹	۳/۹	۴۸۹/۵۹

۳- در مدل ارائه شده محدودیت ظرفیت و نداشتن کمبود موجودی همزمان در نظر گرفته شده و توالی به دست آمده امکانپذیر است.

۲- تلفیق تعیین توالی و تعیین اندازه تولید (زمان سیکل) نتایج بهتری را نسبت به روش مرسوم سیکل مشترک حاصل می‌کند.

واژه نامه

- | | |
|------------------------------------|-------------------------|
| 1. Simulated Annealing | 3. basic period |
| 2. Economic Lot Scheduling Problem | 4. independent solution |

مراجع

- Roger, J., "A Computational Approach to the Economic Lot Scheduling Problem," *Management Science*, 4, pp. 264-291, 1958.
- Elmaghraby, S., "The Economic Lot Scheduling Problem (ELSP)," *Review and Extensions, Management Science*, 24(16), pp. 586-598, 1978.
- Hsu, W., "On the General Feasibility Test for Scheduling Lot Sizes for Several Products on One Machine," *Management Science*, 29, pp. 93-105, 1983.
- Axsater, S., "An Extended Basic Period Approach for Economic Lot Scheduling Problems," working paper, Department of Production Economics, Linkoping Institute of Technology, 1983.
- Davis, S. G., "An Improved Algorithm for Solving the Economic Lot Size Problem," *International Journal of Production Research*, 33(4), pp. 1007-1026, 1995.
- Maxwell, W. L., "The Scheduling of Economic Lot Sizes," *Naval Res. Logist. Quart.* 11, pp. 89-124, 1964.
- Dobson, G., "The Economic Lot-Scheduling problem: Achieving Feasibility Using Time-Varying Lot Sizes," *Operation Research*, 35 (5), pp. 764-771, 1985.
- Gallego, G., "The Extended Economic Lot Scheduling Problem," Technical Report 769, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, N.Y. 1988.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, D.D. JR., and Vecchi, M. P., "Optimization by Simulated Annealing," *Management Science*, 220, pp. 671-680. 1983.
- Johnson, D. S., Aragon, C. R., McGeogh, L. A., and Schevon, C., "Optimization by Simulated Annealing: an Experimentation Evaluation," Part 1, Graph Partitioning, *Operations Research*, 37, pp. 865-891. 1989.
- Bomberger, E., "A Dynamic Programming Approach to a Lot Size Scheduling Problem," *Management Science*, 12(11), 1966.
- Parson, R., Mutiprduct Lot Size Determination When Certain Restrictions Are Active," *Journal of Industrial Engineering*, 17(7), pp. 360-363, 1966.