

# روشی جدید برای طراحی کنترل کننده مقاوم از نوع QFT برای سیستمهای خطی چند متغیره و نامعین

مسعود سبحانی\* و منصور رفیعیان\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۷/۳/۱۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۸/۲/۳)

چکیده - در این مقاله، روش جدیدی به منظور طراحی کنترل کننده مقاوم برای فرایندهای چندمتغیره خطی و نامعین که دارای محدودیتهای سخت زمانی<sup>۱</sup> بر روی بردار خروجیها و سیگنالهای کنترل در پاسخ به اغتشاشات ورودی پله‌ای هستند، ارائه می‌شود. در این روش، فرایند چند متغیره  $m \times m$  به  $m$  فرایند یک متغیره تجزیه می‌شود و سپس با استفاده از نظریه پس‌خورکمی<sup>۲</sup> (QFT) کنترل کننده‌های مطلوب طراحی می‌شوند. کنترل کننده‌هایی که با این روش به دست می‌آیند قطری بوده و از آنجا که هر یک از کنترل کننده‌ها جداگانه طراحی می‌شوند، امکان خوبی برای به دست آمدن پهنای باند<sup>۳</sup> مناسب فراهم می‌شود که این خود باعث اقتصادی شدن طرح می‌شود. کاربرد این روش توسط یک مثال نشان داده شده است.

## A New Approach for QFT-type Robust Controller Design in Uncertain Multivariable Systems

M. Sobhani, M. Rafeeyan

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**ABSTRACT-** *This paper presents a robust controller design methodology for a class of linear uncertain multivariable systems with hard time-domain constraints on their outputs and control signals in response to step disturbance inputs. In this approach, the  $m \times m$  MIMO system is replaced by  $m^2$  SISO systems and then, using the QFT technique, desirable controllers are synthesized. The final controller will be diagonal and since its entries are designed separately with suitable bandwidths, an economic design can be achieved. The application of this new method will be demonstrated through an example.*

سیستمهایی اند که عمل تنظیم را انجام می‌دهند. ستونهای تقطیر با  
درجه خلوص بالا، یاتاقانهای مغناطیسی و سیستمهای نیروگاه

۱- مقدمه  
اغلب سیستمهایی که نیاز به کنترل از طریق پس‌خور دارند

\* استادیار      \*\* دانشجوی دکترا

فهرست علائم

$m$	تعداد سیگنالهای ورودی یا خروجی فرایند	$m \times m$	مجموعه ماتریسهای تابع انتقال مربعی	$\Omega$	فضای پارامترهای نامعین
MIMO	چند ورودی - چند خروجی	$g^{m \times m}$	انتقال مربعی	$P(s, \xi)$	تابع انتقال ماتریسی فرایند با ضرایب نامعین
MISO	چند ورودی - تک خروجی	$\alpha$	بردار اکستریم مجاز	$T^D(s)$	تابع انتقال ماتریسی بین خروجیهای فرایند و ورودیهای مزاحم
$\mathbb{R}^q$	فضای بردارهای حقیقی $q$ تایی	$\beta$	بردار اکستریم مجاز سیگنالهای کنترل		
$e^m$	فضای بردارهای مختلط $m$ تایی	$\xi$	بردار نامعینیهای فرایند		
$e^{m \times m}$	فضای ماتریسهای مختلط				

شاید تنها روش شناخته شده‌ای باشد که نامعینی پارامتری زیاد و اطلاع در مورد فاز را به طور همزمان در نظر می‌گیرد [۵]. این جنبه از روش باعث کاهش قابل توجهی در هزینهٔ پس‌خور (یعنی پهنای باند کنترل‌کننده [۱]) می‌شود. امروزه تکنیکهای جاری روش QFT برای سیستمهای چندمتغیره علاقهٔ بسیاری از محققان را به خاطر ویژگیهای زیر به خود جذب کرده است.

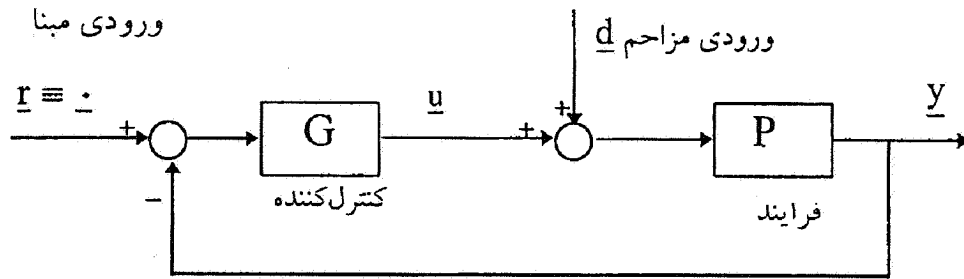
طبیعت طراحی در روش QFT کمی بودن آن است. به عبارت دیگر، ایدهٔ اصلی در این روش آن است که میزان پس‌خور مورد نیاز حلقه بسته باید به طور کمی با مقدار نامعینی موجود در فرایند مرتبط باشد. همچنین طراحی یک سیستم چند متغیرهٔ  $m \times m$  به طراحی  $m^2$  مسئله SISO تبدیل می‌شود. طراحی موفق این مسائل SISO حل مسئلهٔ اصلی را ضمانت می‌کند. از دیگر خصوصیات این روش آن است که مصالحهٔ<sup>۸</sup> مشخصه‌ها بین حلقه‌ها امکانپذیر است [۵].

در زمینهٔ سیستمهای چندمتغیره از کارهای چین و همکاران [۶] و نیز چنگ و همکاران [۷ و ۸] که در آنها فرمولبندی جدیدی را برای فرایندهای چندمتغیره خطی و نامعین با QFT ارائه کرده‌اند، می‌توان نام برد. روش آنها براساس قطری‌سازی فرایند چندمتغیره با استفاده از حلقهٔ پس‌خور داخلی است. فرانچک [۹] نیز نحوهٔ طراحی تنظیم‌کنندهٔ مقاوم برای فرایندهای چندمتغیرهٔ نامعین که محدودیت‌های سخت زمانی روی خروجیها و سیگنالهای کنترل دارند را معرفی کرده است. وی برای شکستن سیستم چندمتغیره به تعدادی سیستم یک متغیره از روش حذفی گوس<sup>۹</sup> استفاده کرده که باعث پیچیده شدن فرمولهای به کار رفته شده است. در اینجا روشی برای طراحی تنظیم‌کننده ارائه می‌شود که از روش فرانچک ساده‌تر است. برای تکمیل بحث، مثالی از مرجع [۱۰]

(شامل تسهیلات هسته‌ای) نمونه‌هایی از این گونه سیستمها هستند. مشخصات عملکرد مطلوب در این سیستمها شامل عملکرد خروجی و قیود سخت‌افزاری مانند اشباع محرکها و نیز محدودیتهای پهنای باندند. البته برقراری پایداری مقاوم مقدم بر ارضای هر هدف عملکرد دیگری است.

تقریباً در دینامیک تمام سیستمهای واقعی پارامترهایی وجود دارند که مقادیر دقیق آنها معلوم نیست ولی محدودهٔ آنها مشخص است (مانند ضریب مقاومت هیدرودینامیکی). به این عبارتها نامعینی ساختاری<sup>۴</sup> یا پارامتری گفته می‌شود. همچنین ممکن است در اثر تقریب در مدل‌سازی، عبارتهایی از معادلات حذف شده باشند که در فرکانسهای بالا اثر قابل توجهی روی رفتار سیستم داشته باشند (مانند دینامیکهای مدل نشده). این نوع نامعینی را غیرساختاری<sup>۵</sup> نامند. نیاز به بررسی این سیستمها سبب ایجاد نظریه کنترل مقاوم<sup>۶</sup> شده است که روش QFT ایجاد شده توسط هورویتس [۱] یکی از مهمترین آنهاست.

به دلایل مختلف، علاقه‌مندی زیادی در خصوص سیستمهای پس‌خور چندمتغیره و نامتغیر با زمان وجود دارد. رقابت اصلی در این زمینه از این نیاز ناشی می‌شود که پایداری مقاوم و عملکرد مطلوب باید هنگامی به دست آید که فرایند تحت کنترل دارای نامعینیهای زیادی است. روش  $H_\infty$  که توسط زیمس [۲] ایجاد و توسط دوویل و دیگران [۳] توسعه یافته و نیز روش QFT از روشهای حوزهٔ فرکانسی‌اند که در حال حاضر برای حل این دسته از مسائل به کار می‌روند. در روش  $H_\infty$  از نرمهای ماتریس تابع انتقال حساسیت<sup>۷</sup> استفاده می‌شود ولی این روش قادر به برخورد مستقیم با نامعینی پارامتری نیست. در نتیجه، اطلاع در مورد فاز در خلال تحلیل و طراحی سیستم از بین می‌رود. در مقابل آن، روش QFT



شکل ۱- نمودار جعبه‌ای سیستم MIMO

بیان می‌شوند.

تعریف ۱: فضای نرم‌دار کامل را باناخ<sup>۱۰</sup> گویند.

تعریف ۲: یک زیرمجموعه S از فضای نرم‌دار، بسته نامیده می‌شود اگر شامل تمام نقاط حدی‌اش باشد.

تعریف ۳: یک زیرمجموعه S از فضای نرم‌دار B را فشرده<sup>۱۱</sup> گویند اگر هر دنباله نامتناهی از اعضای S دارای زیردنباله‌ای باشد که به یکی از اعضای S همگرا شود.

تعریف ۴: مجموعه S در یک فضای برداری، محدب<sup>۱۲</sup> نامیده می‌شود اگر برای هر  $x, y \in S$  و  $a \in [0, 1]$  داشته باشیم  $ax + (1-a)y \in S$ .

تعریف ۵: اگر T نگاشتی از یک فضای باناخ X به داخل خودش باشد، نقطه  $x^* \in X$  یک نقطه ثابت T نامیده می‌شود چنانچه  $Tx^* = x^*$  باشد.

قضیه نقطه ثابت شادر<sup>۱۳</sup>: اگر T یک زیرمجموعه فشرده بسته و محدب در یک فضای باناخ X باشد و  $\Phi$  نگاشتی پیوسته از X به داخل خودش باشد، در این صورت  $\Phi: T \rightarrow T$  دارای یک نقطه ثابت  $T^*$  است به نحوی که  $T^* = \Phi(T^*)$ .

### ۳-۲- شکستن سیستم چندمتغیره

برای شکستن سیستم چندمتغیره به تعدادی سیستم یک متغیره از روش نامتداخل‌سازی بنیادی BNI<sup>۱۴</sup> که توسط هورویتس [۱۰] ارائه شده است، استفاده می‌شود. در این روش یک سیستم چندمتغیره  $m \times m$  به  $m^2$  سیستم یک متغیره شکسته می‌شود و تداخل بین حلقه‌های داخلی سیستم به صورت ورودیهای مزاحم مدل می‌شوند. با استفاده از شکل (۱) می‌توان نوشت

برای طراحی با این روش ارائه شده است.

### ۲- صورت مسئله

نمودار جعبه‌ای سیستم چند متغیره شکل (۱) را در نظر بگیرید که در آن  $\underline{d}(s) \in \mathbb{C}^m$  بردار ورودیهای مزاحم از نوع پله واحد،  $\underline{u}(s) \in \mathbb{C}^m$  بردار سیگنالهای کنترلی،  $\underline{y}(s) \in \mathbb{C}^m$  سیگنالهای خروجی سیستم،  $G(s) \in \mathbb{C}^{m \times m}$  ماتریس تابع انتقال تنظیم کننده و  $P(s, \xi) \in \mathbb{C}^{m \times m}$  ماتریس تابع انتقال فرایند با نامعینی ساختاری  $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^q$  است که  $\Omega = \{ \xi = [\xi_1 \dots \xi_q]; \xi_i \in [\xi_i^{\min}, \xi_i^{\max}], i=1, 2, \dots, q \}$  هدف، طراحی کنترل کننده  $G(s)$  به گونه‌ای است که: اولاً معین و با ضرایب ثابت باشد. ثانیاً، قابل ساخت و دارای پهنای باند محدود باشد. ثالثاً، علی‌رغم وجود نامعنیهای موجود در فرایند P همواره بتواند وظیفه پسزنی اغتشاش ناشی از ورودیهای مزاحم پله‌ای  $\underline{d}$  را انجام دهد و بالاخره رابعاً، محدودیتهای سخت زیر را در حوزه زمان برآورده سازد

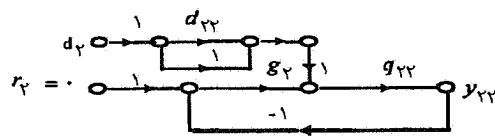
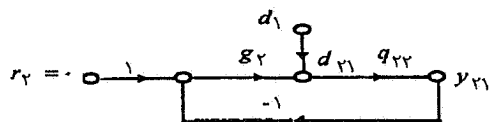
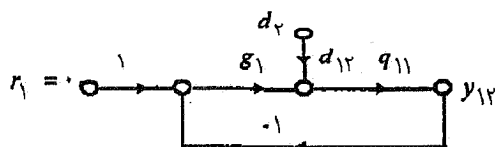
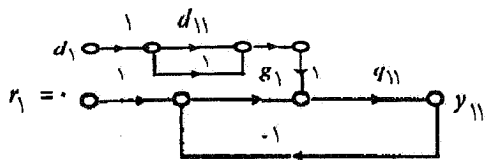
$$\begin{cases} |y_i(t)| \leq \alpha_i \\ |u_i(t)| \leq \beta_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

که در روابط فوق  $m$  = تعداد ورودی = تعداد خروجی و  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  اعدادی مثبت و از پیش تعیین شده‌اند.

### ۳- روش طراحی

#### ۳-۱- مبانی ریاضی

در این قسمت برخی از مفاهیم ریاضی مورد نیاز از مرجع [۱۱]



شکل ۲- چهار سیستم SISO معادل با یک سیستم دو متغیره MIMO

$$\Lambda = \text{diag} \left( \frac{1}{q_{11}}, \frac{1}{q_{22}} \right), \quad G = \text{diag} (g_1, g_2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{q_{12}} \\ \frac{1}{q_{21}} & 0 \end{bmatrix}$$

و با توجه به روابط فوق اعضای ماتریس  $T^D$  عبارت می شوند از:

$$t_{11}^D = \frac{q_{11}}{1+g_1q_{11}} \left\{ 1 - \frac{t_{21}^D}{q_{12}} \right\} \quad t_{12}^D = \frac{q_{11}}{1+g_1q_{11}} \left\{ -\frac{t_{22}^D}{q_{12}} \right\}$$

(V)

$$t_{21}^D = \frac{q_{22}}{1+g_2q_{22}} \left\{ -\frac{t_{11}^D}{q_{21}} \right\} \quad t_{22}^D = \frac{q_{22}}{1+g_2q_{22}} \left\{ 1 - \frac{t_{12}^D}{q_{21}} \right\}$$

یعنی کافی است به جای بررسی سیستم  $2 \times 2$  اصلی، چهار سیستم SISO فوق را در نظر بگیریم و این در حالی است که هر دو سیستم از چهار سیستم فوق دارای یک تابع انتقال حلقه باز یکسان هستند. در این مورد، ساختار سیستمهای یک متغیره ای که از شکستن سیستم اصلی به دست می آیند در شکل (۲) نشان داده شده است.

با طراحی  $g_1$  و  $g_2$  مناسب برای سیستمهای یک متغیره حاصل، حصول پاسخ برای سیستم چندمتغیره اصلی حتمی است زیرا اگر نگاشت  $\Phi(T^D) = (\Lambda + G)^{-1} \{I - BT^D\}$  را در نظر بگیریم، می توان نشان داد که  $\Phi$  نگاشتی پیوسته از  $T^D$  به  $T^D$  است. ضمناً از آنجا که شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار است، یک نقطه ثابت خواهد داشت. یعنی وجود پاسخ برای سیستم اصلی تضمین می شود.

$$\underline{y} = (I + PG)^{-1} P \underline{d} \quad (2)$$

لذا تابع انتقال حلقه بسته می شود

$$\underline{y} = T^D \underline{d}, \quad T^D = (I + PG)^{-1} P \quad (3)$$

با توجه به روابط فوق می توان نوشت

$$(I + PG) \underline{y} = P \underline{d} \quad (4)$$

با فرض اینکه فرایند به ازای تمامی مقادیر نامعینها معکوس پذیر باشد آن گاه می توان نوشت

$$(P^{-1} + G) \underline{y} = \underline{d} \quad (5)$$

اگر  $G$  تابع انتقال تنظیم کننده قطری فرض شود و همچنین  $P^{-1}$  به دو بخش قطره  $\Lambda$  و غیرقطری  $B$  تقسیم شود یعنی  $P^{-1} = \Lambda + B$ ، آن گاه با توجه به معادله (۵) می توان نوشت

$$(\Lambda + B + G) \underline{y} = \underline{d}, \quad \underline{y} = (\Lambda + G)^{-1} \{ \underline{d} - B \underline{y} \}$$

$$\therefore T^D = (\Lambda + G)^{-1} \{ I - BT^D \} \quad (6)$$

که برای  $m=2$  خواهیم داشت:

### ۳-۳- استخراج نامساویهای مربوط به سیگنالهای خروجی و کنترل

نامساویهای (۱) در میدان زمان بیان شده‌اند و لذا برای آنکه قابل استفاده در روش QFT شوند باید به حوزه فرکانس منتقل شوند. برای این کار می‌توان از لیم زیر استفاده کرد:

لیم انتقال (سبحانی و جاسوریا [۱۲]): اگر  $G(s)$  یک تابع انتقال پایدار با شرایط اولیه صفر و دارای نرم بینهایت  $\|G(j\omega)\|_{\infty} = M$  باشد، در این صورت پاسخ به ورودی پله‌ای واحد آن به شکل زیر محدود است

$$|y(t)| = \left| L^{-1} \left[ G(s) \cdot \frac{1}{s} \right] \right| \leq M \quad (۸)$$

شایان ذکر است که ضریب ۴ موجود در طرف راست بر اساس تجربه محققان [۹ و ۱۳] باعث ایجاد شرایط فوق طراحی<sup>۱۵</sup> می‌شود. لذا در اکثر موارد می‌توان از اعداد کوچکتری استفاده کرد. به عنوان مثال فرانچک [۹] از ضریب ۱ به جای ۴ در روابط خود استفاده کرده است. در ضمن در اینجا دوبار به طور مکرر از این قضیه در استخراج نامساویها استفاده می‌شود. با توجه به معادله (۷) خروجیهای سیستم  $2 \times 2$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\underline{y} = T^D \underline{d} \quad ; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^D & t_{12}^D \\ t_{21}^D & t_{22}^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

که با جایگذاری از (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_1(s) = \frac{q_{11}}{1+g_1q_{11}} \left[ 1 - \frac{t_{11}^D}{q_{12}} \right] d_1 + \frac{q_{11}}{1+g_1q_{11}} \left[ -\frac{t_{12}^D}{q_{12}} \right] d_2 \\ y_2(s) = \frac{q_{22}}{1+g_2q_{22}} \left[ -\frac{t_{21}^D}{q_{21}} \right] d_1 + \frac{q_{22}}{1+g_2q_{22}} \left[ 1 - \frac{t_{22}^D}{q_{21}} \right] d_2 \end{cases} \quad (۱۰)$$

با فرض اینکه ورودیهای مزاحم به صورت  $d_1 = d = \frac{1}{s}$  و  $d_2 = \mu d$  باشند در این صورت

$$\begin{cases} y_1(s) = \frac{q_{11}}{1+g_1q_{11}} \left[ 1 - \frac{1}{q_{12}} (t_{11}^D + \mu t_{12}^D) \right] d \triangleq t_1^* d \\ y_2(s) = \frac{q_{22}}{1+g_2q_{22}} \left[ \mu - \frac{1}{q_{21}} (\mu t_{12}^D + t_{21}^D) \right] d \triangleq t_2^* d \end{cases} \quad (۱۱)$$

حال با توجه به توابع انتقال  $t_1^*$  و  $t_2^*$  می‌توان اولین شرط از شرایط (۱) را با استفاده از لیم انتقال و با این فرض که ورودیهای مزاحم از نوع پله‌ای واحدند اعمال کرد

$$\begin{cases} \left| t_1^*(s) \Big|_{s=j\omega} \leq \alpha_1 \Rightarrow |y_1(t)| \leq \alpha_1 \\ \left| t_2^*(s) \Big|_{s=j\omega} \leq \alpha_2 \Rightarrow |y_2(t)| \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (۱۲)$$

و طبق معادله‌های (۱۱) خواهیم داشت

$$\begin{cases} \left| \frac{q_{11}}{1+g_1q_{11}} \cdot \left| 1 - \frac{1}{q_{12}} (t_{11}^D + \mu t_{12}^D) \right| \right| \leq \alpha_1 \\ \left| \frac{q_{22}}{1+g_2q_{22}} \cdot \left| \mu - \frac{1}{q_{21}} (\mu t_{12}^D + t_{21}^D) \right| \right| \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (۱۳)$$

از آنجا که عبارات  $A = t_{11}^D + \mu t_{12}^D$  و  $B = \mu t_{12}^D + t_{21}^D$  هنوز معلوم نیستند، لذا معادله‌های بالا قابل استفاده در روش QFT نیستند.

### ۳-۴- روش جدید

در اینجا پیشنهاد می‌شود که با توجه به فرض  $d_2 = \mu d_1 = \mu d$  به صورت زیر عمل شود

$$\begin{cases} y_1(s) = (t_{11}^D + \mu t_{12}^D) d = Bd \\ y_2(s) = (\mu t_{12}^D + t_{21}^D) d = Ad \end{cases} \quad (۱۴)$$

چون ورودی مزاحم از نوع پله‌ای است لذا عبارتهای A و B تابع انتقال‌اند، لذا با استفاده از لیم انتقال می‌توان نامساویهای زیر را نوشت:

$$\begin{cases} |B|_{s=j\omega} \leq \alpha_1 \Rightarrow |y_1(t)| \leq \alpha_1 \\ |A|_{s=j\omega} \leq \alpha_2 \Rightarrow |y_2(t)| \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (۱۵)$$

حال باید معادله‌های (۱۵) را به نحو مناسبی در معادله‌های (۱۳) جایگذاری کرد. این جایگذاری به گونه‌ای انجام می‌گیرد که از بروز فوق طراحی روی کنترل‌کننده‌ها بکاهد. یعنی عبارات سمت چپ نامساویهای زیر انتخاب می‌شوند

$$\begin{cases} \left| 1 - \frac{A}{q_{12}} \right|_{s=j\omega} \leq \left| 1 - \frac{1}{q_{12}} (t_{11}^D + \mu t_{12}^D) \right|_{s=j\omega} \leq 1 + \left| \frac{A}{q_{12}} \right|_{s=j\omega} \\ \left| \mu - \frac{B}{q_{21}} \right|_{s=j\omega} \leq \left| \mu - \frac{1}{q_{21}} (\mu t_{12}^D + t_{21}^D) \right|_{s=j\omega} \leq \mu + \left| \frac{B}{q_{21}} \right|_{s=j\omega} \end{cases} \quad (۱۶)$$

ساختی که در هر فرکانسی در محدوده‌ای قرار گیرند که نامساویهای مربوطه آنها ارضا شوند. مثلاً  $L_{10}$  باید به گونه‌ای طراحی شود که در هر فرکانس در نامساویهای اول (۱۷) و (۱۸) صدق کند. همچنین برای اینکه علی‌رغم وجود همه نامعینیها، پایداری نسبی وجود داشته باشد، مناطقی که با منحنی U-شکل نشان داده شده است به عنوان منطقه ممنوعه برای شکل‌دهی حلقه باز اسمی در نظر گرفته شود. این مناطق حداقل پایداری نسبی از پیش تعیین شده‌ای را برای هر حلقه تضمین می‌کنند. شایان ذکر است که این روش قابل توسعه به سیستمهای بیش از  $2 \times 2$  است.

#### ۴- مثال

فرایندی که در اینجا استفاده می‌شود از مرجع [۱۰] گرفته شده است. این فرایند یک فرایند دومتغیره خطی است که دارای نامعینی پارامتری به صورت زیر است

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} k_{11} \in [1, 5] & k_{12} \in [1, 10] \\ k_{21} \in [0.02, 0.08] & k_{22} \in [1, 5] \end{matrix} \quad (19)$$

محدودیت‌های سخت زمانی که روی سیگنالهای خروجی و کنترل خواسته شده به صورت زیرند

$$\begin{cases} |u_1(t)| \leq 3 \\ |u_2(t)| \leq 1/5 \end{cases}, \quad \begin{cases} |y_1(t)| \leq 0.75 \\ |y_2(t)| \leq 0.75 \end{cases} \quad (20)$$

فرایند اسمی را که انتخاب آن در روش QFT کاملاً اختیاری است، به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$P_o(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0.08 & 1 \end{bmatrix}$$

در ضمن هر دو ورودی مزاحم مساوی و برابر پله‌ای واحدند ( $\mu=1$ ). با استفاده از روشی که در اینجا معرفی شد، مثال بالا حل و نتایج آن در شکل‌های زیر آورده شده‌اند. در این مثال حد بهره به ازای تمام نامعینیهای سیستم  $GM=6$  db در نظر گرفته شده است. باندهای تحتانی آنهاهی هستند که ناحیه بالای آنها در نمودار نیکولز در نامساوی مربوط در یک فرکانس خاص صدق می‌کند. عکس این

بنابراین با جایگذاری (۱۵) در (۱۳) و رعایت (۱۶) و با در نظر گرفتن نامگذاریهای  $L_1 = L_{10} q_{11} / q_{110}$  و  $L_2 = L_{20} q_{22} / q_{220}$  خواهیم داشت

$$\begin{cases} \left| 1 - \frac{\alpha_2}{|q_{12}|} \right|_{s=j\omega} \cdot \left| \frac{q_{11}}{1 + \frac{L_{10} q_{11}}{q_{110}}} \right|_{s=j\omega} \leq \alpha_1 \\ \left| \mu - \frac{\alpha_1}{|q_{21}|} \right|_{s=j\omega} \cdot \left| \frac{q_{22}}{1 + \frac{L_{20} q_{22}}{q_{220}}} \right|_{s=j\omega} \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (17)$$

اکنون باید نامساویهای مربوط به سیگنالهای کنترل مشخص شوند. با توجه به شکل (۱) می‌توان نوشت

$$u_1 = -g_1 y_1, \quad u_2 = -g_2 y_2$$

با توجه به شرایط (۱) و مطالب بالا و با استفاده از لیم انتقال می‌توان نوشت

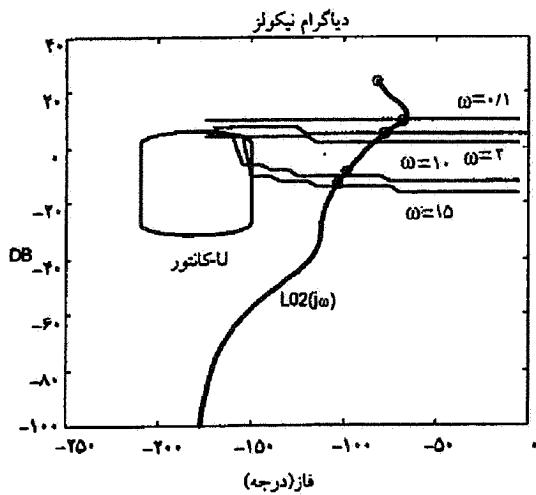
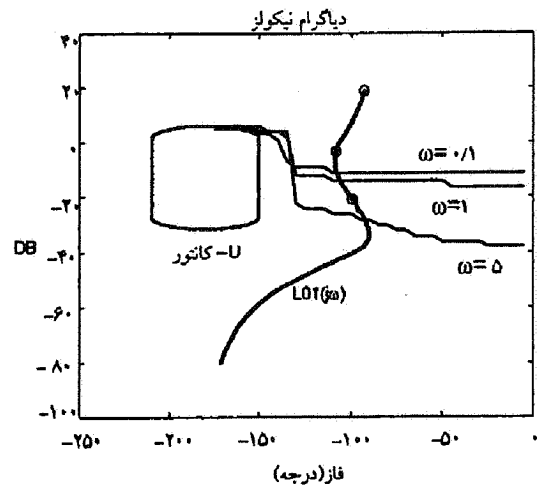
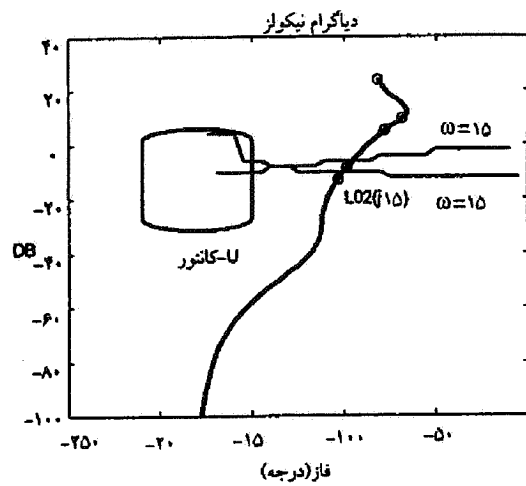
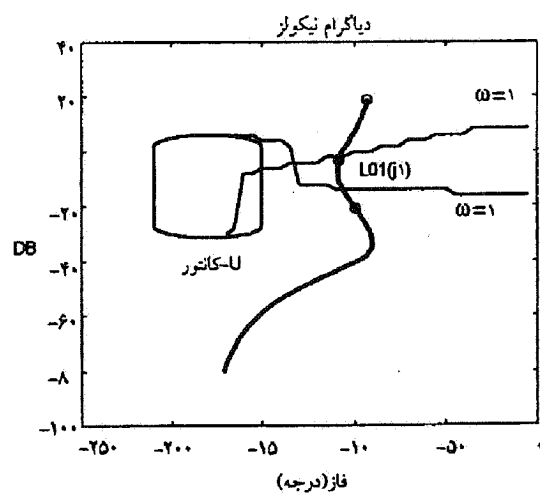
$$u_1 = -g_1 \left[ \frac{q_{11}}{1 + g_1 q_{11}} \left( 1 - \frac{1}{q_{12}} (t_{21}^D + \mu t_{22}^D) \right) \right] d_1 \triangleq t_1^{**} d_1$$

$$|t_1^{**}| \leq \beta_1 \Rightarrow |u_1(t)| \leq \beta_1$$

و سرانجام با استدلالی مشابه حالت قبل برای هر دو سیگنال کنترل خواهیم داشت

$$\begin{cases} \left| \frac{L_{10} q_{11} / q_{110}}{1 + L_{10} q_{11} / q_{110}} \right|_{s=j\omega} \cdot \left| 1 - \frac{\alpha_2}{|q_{12}|} \right|_{s=j\omega} \leq \beta_1 \\ \left| \frac{L_{20} q_{22} / q_{220}}{1 + L_{20} q_{22} / q_{220}} \right|_{s=j\omega} \cdot \left| \mu - \frac{\alpha_1}{|q_{21}|} \right|_{s=j\omega} \leq \beta_2 \end{cases} \quad (18)$$

حال با استفاده از نامساویهای (۱۷) و (۱۸) در هر فرکانس می‌توان با تغییر نامعینیهای موجود در فرایند و در زوایای فاز مختلف، مناطقی از نمودار نیکولز را که در نامساویها صدق می‌کنند، شناسایی کرد. حاصل کار، باندهای تحتانی یا فوقانی یا مرزهای بسته‌ای است که نشاندهنده کران نواحی مجاز در هر فرکانس‌اند. پس از تعیین باندهای مربوطه، عمل شکل‌دهی حلقه  $16$  برای طراحی  $L_1$  و  $L_2$  انجام می‌گیرد که عبارت است از تعیین توابع انتقال قابل

شکل ۴- باندهای تحتانی سیگنال  $y_2(t)$ شکل ۳- باندهای تحتانی سیگنال  $y_1(t)$ شکل ۶- باند تحتانی  $y_2$  و باند فوقانی  $u_2$ شکل ۵- باند تحتانی  $y_1$  و باند فوقانی  $u_1$ 

پهنای باند آنهاست. پاسخ زمانی سیگنالهای کنترل و خروجیهای سیستم MIMO اصلی در مقابل اغتشاشات پله‌ای واحد، که به طور همزمان به سیستم وارد شده‌اند، در شکل‌های (۷) تا (۱۰) نشان داده شده‌اند. در این شکل‌ها، نامعینیتها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که شامل مقادیر حداکثر سیگنال‌های مربوطه نیز باشند. با توجه به پاسخهای زمانی سیستم، دیده می‌شود که کلیه مشخصات عملکرد مطلوب به خوبی برآورده شده‌اند.

#### ۵- خلاصه و نتیجه گیری

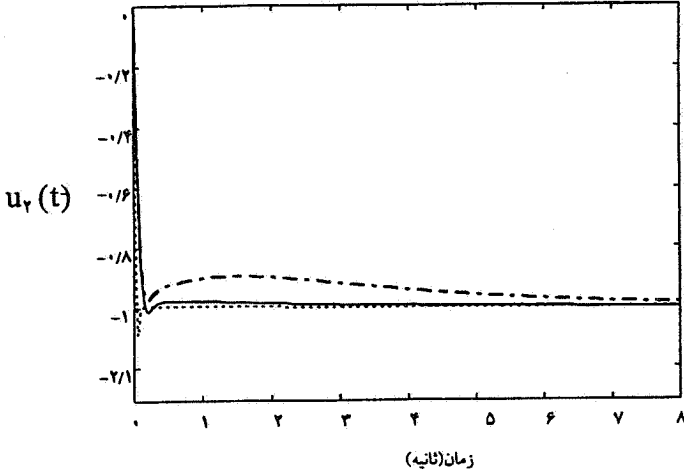
روش جدیدی به منظور طراحی تنظیم‌کننده مقاوم برای

موضوع در مورد باندهای فوقانی وجود دارد. شکل‌های (۳) تا (۶) این باندها را در برخی از فرکانسها نشان می‌دهند. با روش شکل‌دهی حلقه، توابع انتقال حلقه باز اسمی سیستم و در نتیجه توابع انتقال کنترل‌کننده‌ها به صورت زیر طراحی می‌شوند

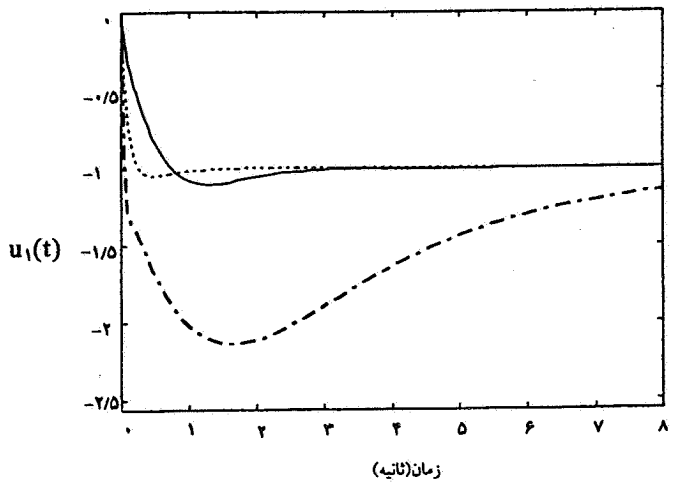
$$g_1(s) = \frac{500(s+2)(s+35)(s+60)}{s(s+50)(s+80)(s+120)} \quad (21)$$

$$g_2(s) = \frac{5000(s+0.4)(s+22)(s+60)}{s(s+40)(s+17)(s+500)} \quad (22)$$

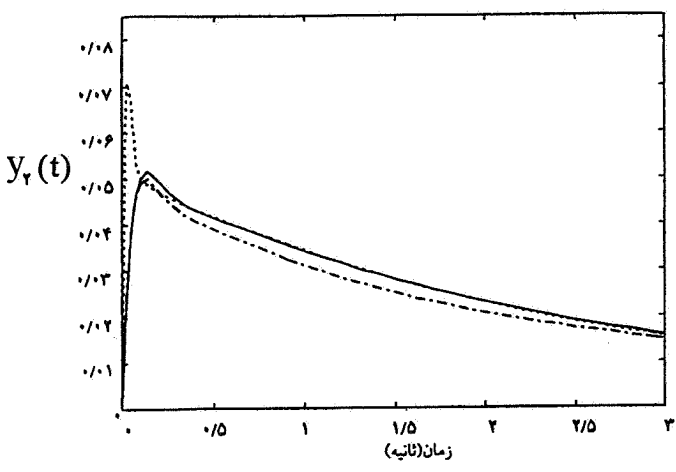
از خصوصیات مهم کنترل‌کننده‌های به دست آمده، محدود بودن



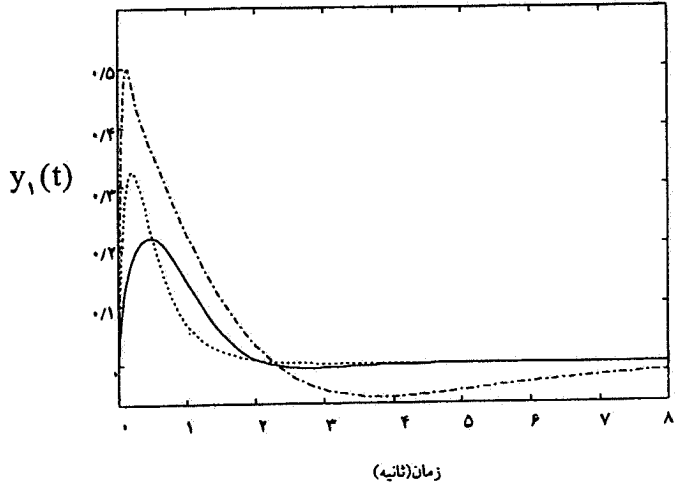
شکل ۸- سیگنال کنترل  $u_7(t)$  به ازای برخی از مقادیر نامعینینها



شکل ۷- سیگنال کنترل  $u_1(t)$  به ازای برخی از مقادیر نامعینینها



شکل ۱۰- سیگنال خروجی  $y_7(t)$  به ازای برخی از مقادیر نامعینینها



شکل ۹- سیگنال خروجی  $y_1(t)$  به ازای برخی از مقادیر نامعینینها

می شود و سپس با استفاده از نظریه پس خور کمی، کنترل کننده های مطلوب طراحی می شوند. کنترل کننده هایی که با این روش به دست می آیند قطری بوده و می توان آنها را طوری طراحی کرد که دارای بهنای باند مناسب شوند. کاربرد این روش توسط یک مثال نشان داده شد.

فرایندهای چندمتغیره خطی و نامعین که مربعی و معکوس پذیر بوده و دارای محدودیتهای سخت زمانی بر روی خروجیها و سیگنالهای کنترل در پاسخ به اغتشاشات پله ای باشند، ارائه شد. در این روش، فرایند چند متغیره  $m \times m$  به  $m^2$  فرایند یک متغیره تجزیه



- |                                 |                                  |                               |
|---------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| 1. hard time-domain constraint  | 7. sensitivity transfer function | 13. Schauder                  |
| 2. quantitative feedback theory | 8. tradeoff                      | 14. basically non-interacting |
| 3. bandwidth                    | 9. Gauss elimination             | 15. overdesign                |
| 4. structured uncertainty       | 10. Banach                       | 16. loop shaping              |
| 5. unstructured uncertainty     | 11. compact                      |                               |
| 6. robust control               | 12. convex                       |                               |

## مراجع

1. Horowitz, I. M., *Quantitative Feedback Design Theory*, QFT Publications, 4470 Grinnell, Boulder, 1993.
2. Zames, G., "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Semi- Norms, and Approximate Inverses," *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. 26, no. 2, pp. 301-320, 1981.
3. Doyle, J., and et. al., "State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems," *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847, 1989.
4. Chait, Y., and Holot, C., "Comparison of  $H_\infty$  and QFT for a SISO Plant with Plant Uncertainty and Performance Bounds," *Proc. ASME Winter Annual Meetings*, Dallas, TX, pp. 33-40, 1990.
5. Horowitz, I. M., "Survey of Quantitative Feedback Theory (QFT)," *Int. J. Control*, Vol. 53, pp. 255-291, 1991.
6. Chien, C., Wang, B., and Horowitz, I. M., "An Alternative Method for the Design of MIMO System with Large Plant Uncertainty," *Control Theory and Advanced Technology*, Vol. 9, pp. 955-969, 1993.
7. Cheng, C., Liao, Y., and Wang, T., "Quantitative Feedback Design of Uncertain Multivariable Control Systems," *Int. J. Control*, Vol. 65, pp. 537-553, 1996.
8. Cheng, C., Liao, Y., and Wang, T., "Quantitative Design of Uncertain Multivariable Control Systems with an Inner-Feedback Loop," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, Vol. 144, pp. 195-201, 1997.
9. Franchek, M., and Jayasuriya, S., "Controller Design for Performance Guarantees in Uncertain Regulating Systems," *Int. J. Control*, Vol. 61, No. 1, pp. 127-148, 1995.
10. Oldak, S., and Horowitz, I. M., "A Simplified Approach for the Design of Basically Non-Interacting Multiple-Input-Multiple-Output Systems Using QFT," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, Vol. 3, pp. 283-312, 1993.
11. Griffel, D., *Applied Functional Analysis*, Halsted Press, 1981.
12. Sobhani, M., and Jayasuriya, S., "Controller Design for Maximizing the Size of a Step Disturbance in Non-Minimum Phase Uncertain Systems," *Int. J. Control*, Vol. 59, No. 2, pp. 561-581, 1994.
13. Pritchard, C. J., and Wigdorowitz, B., "Improved Method of Determining Time-Domain Transient Performance Bounds from Frequency Response Uncertainty Regions," *Int. J. Control*, Vol. 66, No. 2, pp. 311-327, 1997.