

تحلیل خطی و غیرخطی پلهای کابلی ایستا به کمک سری‌های فوریه

مجتبی ازهری* - رسول میرقادی**

خلاصه

پلهای کابلی ایستایکی ازسیستم‌های سازه‌های متداول برای پوشانیدن دهانه‌های ۲۰۰-۴۰۰ مترمی‌باشند. کابلها دراین پلهاکه نقش عمده درظرفیت باربری آنها دارندمقادیرعمده‌ای ازبارقائم را ازروی عرشه‌پل گرفته‌وبه‌برج انتقال می‌دهند. سختی کابلها درطول مسیربارگذاری متغیربوده‌وبان نیروی محوری و طول آن بطورغیرخطی متناسب می‌باشندوباعث رفتارغیرخطی سیستم‌خواهدگردید. دراین مقاله با استفاده ازسری‌های فوریه‌ومی‌نیم‌کردن انرژی پتانسیل کل تحلیل خطی و غیرخطی این پلها انجام گرفته‌وآنالیزکامپیوتری بصورت دوروش "همگرایی تکراری" و "سختی نرمی" انجام گرفته‌ونتایج وسرعت همگرایی دو روش با یکدیگرمقایسه‌گردیده‌است. همچنین نحوه قرار گرفتن کابلهاکه تفاوتهای فاحشی دررفتارخطی و غیرخطی ایجاد کرده‌و نتیجتاً تاثیرقابل ملاحظه‌ای روی باربری پل خواهدگذاشت موردبررسی قرارخواهدگرفت.

مقدمه

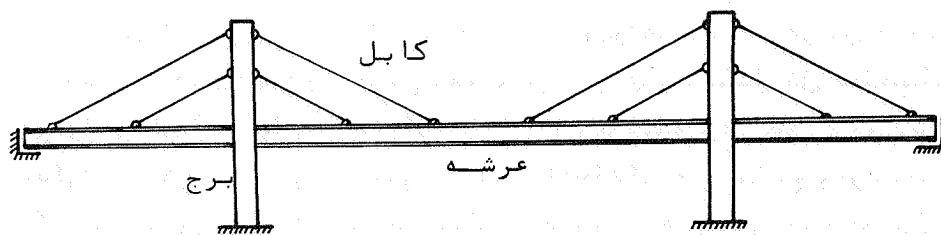
درپلهای کابلی ایستاوپلهای معلق که هر دو برای پوشانیدن دهانه‌های بیش از ۲۰۰ مترکاربرددارند [۱] ونقش اصلی انتقال بارهای ناشی ازوزن مرده‌وبارترا فیک را کابلها بعهده‌دارند. کابلها

* مربی دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

** استادیار دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

در سیستم پل‌های معلق تقریباً "عمده بار قائم به نحو موثری از روی عرشه پل برداشته و به برجها و تکیه‌گاه‌های انتهایی طرفین پل انتقال می‌دهد، در صورتیکه در پل‌های کابلی ایستابعلت تورب کابلها، مولفه قائم نیروی کابلها سبب خنثی کردن بار قائم روی پل می‌شود و مولفه افقی آن عرشه پل را تحت نیروی محوری فشاری قرار خواهد داد که مسائلی ناپایداری عرشه را به همراه خواهد داشت [۲].

اجزاء اصلی سیستم پل کابلی ایستامطابق شکل عبارتند از:

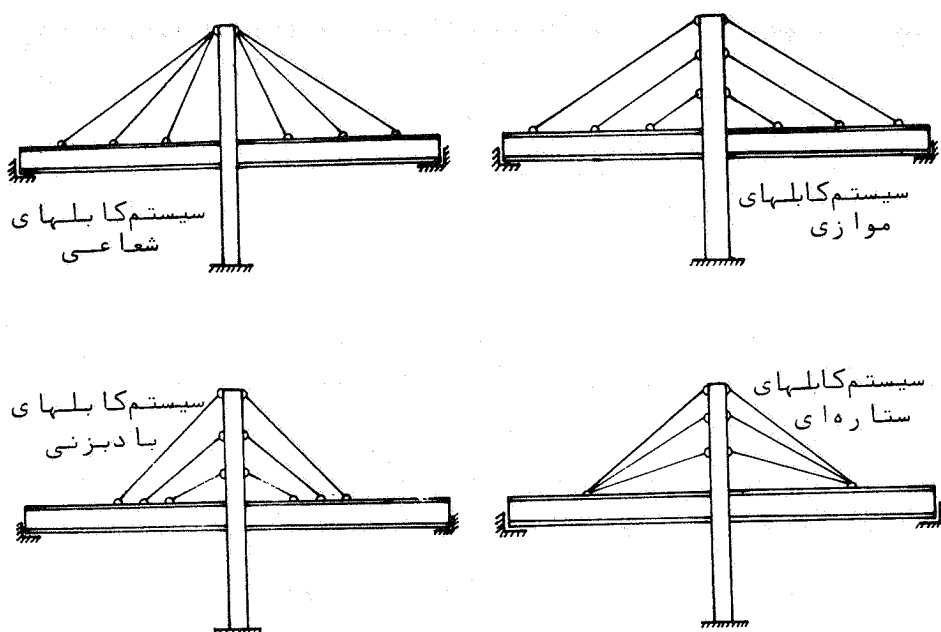


شکل (۱)

– عرشه تقویت شده پل (Stiffened Girder) که معمولاً از تیرهای فولادی ساخته شده از ورق با مقطع به شکل I و T و یا مقطع قوطی شکل بسته، تیرهای فولادی خرپایی شکل، تیرهای بتنی مسلح معمولی و یا تیرهای بتنی مسلح پیش تنیده ساخته می‌شوند. بارهای مرده و زنده از روی این عرشه توسط عملکرد خمشی آن به کابلها و برجها منتقل می‌گردد. اتصال عرشه به برجها بصورت ساده بوده و مستقیماً "لنگر خمشی عرشه وارد برجها نمی‌شود.

– کابل‌های مورب (Inclined cables) که در فواصل مشخصی با تیرهای مرده روی عرشه پل را با عملکرد کششی خود گرفته و به برجها منتقل

می‌نماید. ترتیب قرار گرفتن کابلها نسبت به برج و عرشه به روشهای مختلفی در شکل زیر نشان داده شده است [۱] و [۳].



شکل (۲)

– برجها (Towers یا Pylons) که بارهای منتقل شده توسط کابلها و عرشه را به صورت عملکرد فشاری به زمین انتقال می‌دهد. برجها از بتن مسلح و یا فولاد A شکل ، H شکل و یا برجهای تکی با ساختی محوری نسبتاً زیاد ساخته می‌شود [۱] و [۳].

رفتار غیرخطی کابلها :

استقلال

در کابلها، چنانچه در وضعیت بی‌جز وضعیت قائم تحت بارگذاری قرار گیرند مقداری خیز بعلت وزن کابل خواهیم داشت و مقداری از نیروی کششی محوری داخل کابل، صرف جبران خیز موجود می‌گردد. بدیهی است که هر اندازه که تورب کابلها کمتر باشد کابلها به نحو موثرتری در باربری سازه شرکت خواهند کرد. چنانچه مدول الاستیسته کابل در وضعیت قائم E_e باشد در وضعیت مورب مدول الاستیسته کابل E_i ، به صورت رابطه زیر خواهد بود [۳] و [۴]:

$$E_i = \frac{E_e}{1 + \frac{(\gamma l \cos \alpha)^2}{12 \sigma^3} E_e} \quad (1)$$

در رابطه فوق، γ وزن مخصوص کابل، l طول کابل، α زاویه کابل با افق و σ تنش کششی موجود در کابل باشد. مشاهده می‌شود که صلبیت کابلها تنها تابع مشخصات هندسی آن نبوده بلکه بستگی به نیروی وارد بر آن آنها بصورت غیرخطی می‌باشد. مطلب فوق باعث می‌گردد که رفتار پلهای کابلی ایستا بصورت غیرخطی بوده و با توجه به اینکه سختی کابل، $K = \frac{E_i A}{l}$ و تنش موجود در آن، $\sigma = E_i \frac{\Delta l}{l}$ ، بطور درهم بهم‌دیگر وابسته هستند بنا بر این روش حل تکراری مناسبی بایستی بکاربرده شود که در آن سختی کابل و نیروی داخل کابل همگرا گردند. از طرف دیگر با توجه به تغییر طول نسبتاً زیاد کابل، Δl ، می‌توان در حل دقیق آن طول واقعی بعد از تغییر شکل کابل در محاسبه مدول الاستیسته E_i ، سختی K و تنش σ بکاربرده شود.

روش تحلیل

روشهای مختلفی جهت تحلیل پلهای کابلی ایستا وجود دارد از جمله آنها از روش کلاسیک اجزاء محدود را می‌توان نام برد [۵] و [۶] در

این روش سختی کل سازه با سوار کردن ماتریس سختی اعضای آن نظیر عرشه، برج و کابلها بدست آمده و با داشتن نیروهای ناشی از بار زنده و مرده و یا سایر بارگذاریها مجهولات تغییر مکان عمومی سیستم را می‌توان تعیین نمود. سپس با داشتن تغییر مکانهای نیروهای داخلی کلیه اجزاء سازه محاسبه می‌گردد. از آنجا که همانطور که نشان داده شد سختی کابلها فقط تابع مشخصات هندسی آن نبوده و بطور نمایی با تنش وارده بر آن متناسب می‌باشد، دستگامه معادلات بدست آمده غیرخطی بوده و ضرائب بردار مجهولات بطور ممزوجی با تغییر مکانها ارتباط دارند. بطوریکه یک روش حل تکراری که سختی کلیه کابلها در آن همگرا گردد بایستی مورد استفاده قرار گیرد.

روشی که ذیلاً "مورد بررسی قرار می‌گیرد یکی از روشهای عددی بوده و بر اساس می‌نیم کردن انرژی پتانسیل کل سیستم می‌باشد. این روش برای تحلیل خطی پلهای کابلی [۷] نشان داده شده است که بسیار مناسب بوده و بسادگی قابلیت تحلیل عددی بوسیله کامپیوتر را دارد. در پلهای کابلی ایستا با توجه به اینکه شرایط انتهایی آنها بصورت مفصلی بوده و اتصال عرشه بر روی برج بصورت ساده می‌باشد و لنگری به برج منتقل نمی‌گردد، می‌توان تغییر شکل سیستم را بصورت یک مجموعه سینوسی در نظر گرفت. ضرایب جملات سینوسی با استفاده از می‌نیم کردن انرژی پتانسیل کل سیستم بدست می‌آیند. در این مقاله اثرات غیرخطی سختی کابلها و نیروهای پیش تنیدگی بر روی آنها مورد مطالعه قرار گرفته و نشان داده خواهد شد که انتخاب شکل مناسبی برای کابلها و نیروهای پیش تنیدگی معینی در آنها می‌تواند از اثرات غیرخطی آنها بکاهد [۸].

فرضیات

فرضیاتی که در تحلیل این نوع سازه‌ها می‌شوند بگونه‌ای است که با نحوه ساخت و عملکرد آنها مطابقت دارد. این فرضیات عبارتند از:

- ۱- عرشه تقویت شده از کنار برجها می‌گذرد و هیچگونه لنگری به برج

در این صورت می‌توان تغییر شکل قائم را بصورت یک مجموعه سینوسی که شرایط سرحدی را ارضاء می‌کند در نظر گرفت و با می‌نیم کردن انرژی پتانسیل کل دامنه جملات سینوسی را تعیین نمود:

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{l_G} \quad (2)$$

$$\pi = U + V_p = \int_0^{l_G} \frac{1}{2} EI_G (y'')^2 dx + \sum_{i=1}^{N=N_1+N_2} F_{iy} Y_i \quad (3)$$

$$- \int_{x_0}^{x_E} q(x) y dx$$

که در آن v انرژی ارتجاعی ذخیره شده در عرشه و V_p انرژی پتانسیل بارهای خارجی q و F_{iy} می‌باشند. برای تعادل لازم است که انرژی پتانسیل کل π می‌نیم باشد که با قرار دادن y از رابطه (۲) در رابطه (۳) و می‌نیم کردن آن ضرائب a_m بصورت زیر بدست خواهند آمد.

$$a_m = \frac{\int_{x_0}^{x_E} q(x) \sin \frac{m\pi x}{l_G} dx - \sum_{i=1}^N F_{iy} \sin \frac{m\pi x_i}{l_G}}{EI_G \left(\frac{m\pi}{l_G}\right)^4 \cdot \frac{l_G}{2}} \quad (4)$$

$$a_m = \frac{\int_{x_0}^{x_E} q(x) \sin \frac{m\pi x}{l_G} dx - \sum_{i=1}^N F_{iy} \sin \frac{m\pi x_i}{l_G}}{EI_G \left(\frac{m\pi}{l_G}\right)^4 \cdot \frac{l_G}{2}}$$

قسمت دوم وقتی که عرشه پیل تحت بارهای R_1 و R_2 واقع شود که با اعمال بارهای واحد در محل عکس العمل‌ها و در نظر گرفتن تغییر شکل تیر بصورت سری‌های سینوسی با ضرائب b_m و c_m مقادیر آنها بطور مشابه عبارت خواهند بود:

$$b_m = \frac{\sin m\pi \frac{\bar{l}_1}{l_G}}{EI_G \left(\frac{m\pi}{l_G}\right)^4 \cdot \frac{l_G}{2}} \quad \text{و} \quad c_m = \frac{\sin m\pi \frac{\bar{l}_2}{l_G}}{EI_G \left(\frac{m\pi}{l_G}\right)^4 \cdot \frac{l_G}{2}} \quad (۵)$$

و مقدار تغییر شکل کل عرشه پل عبارت خواهد بود بیا :

$$Y = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{l_G} + R_1 \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{l_G} + R_2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi x}{l_G} \quad (۶)$$

که در آن تغییر مکان در محل عکس العمل های R_1 و R_2 برابر صفر می باشد یا :

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi \bar{l}_1}{l_G} + R_1 \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi \bar{l}_1}{l_G} + R_2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi \bar{l}_1}{l_G} = 0 \quad (۷)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G} + R_1 \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G} + R_2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G} = 0$$

بنابراین مقادیر عکس العمل های R_1 و R_2 از رابطه های (۷) بدست آمده و مقدار تغییر مکان عرشه پل توسط رابطه (۶) تعیین می گردد. مقدار نیروی کابلها، که مولفه قائم اثر آن روی عرشه پل برای محاسبه a_m ضروری می باشد، با داشتن تغییر مکان طول کابل خواهد آمد بیا :

$$F_i = K_i \Delta l_i \quad (۸)$$

که در آن F_i و K_i و Δl_i به ترتیب نیرو، سختی و تغییر طول کابل i ام می‌باشد. مقدار تغییر طول کابلها را می‌توان با داشتن تغییر مکان عرشه پل و برجها از رابطه زیر بدست آورد:

$$l_i = y_i \sin \theta_i \pm \Delta l_i \cos \theta_i \quad (9)$$

که در آن y_i تغییر مکان قائم عرشه پل در محل کابل i ام و Δl_i تغییر مکان افقی برج در محل کابل i ام و θ_i زاویه حاده وتر کابل با محور عرشه پل می‌باشد. علامت مثبت و منفی به ترتیب نشان دهنده افزایش و کاهش طول کابل می‌باشد. و مقدار سختی کابل توسط رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$K_i = \frac{E_e}{1 + \gamma_i^2 (l_i + \Delta l_i)^2 \cos^2 \theta_i} \frac{A_i}{l_i + \Delta l_i} \quad (10)$$

$$12 \left(\frac{F_i}{A_i} \right)^3$$

تغییر مکان افقی برج در محل کابل i ام، Δl_i ، چنانچه کابل به برج اول یا دوم متصل باشد به ترتیب از عبارتهای زیر بدست می‌آید:

$$\Delta l_i = \sum_{k=1}^{\frac{N_1}{2}} f_{ik} (F_k \cos \theta_k - F_{N_1+1-k} \cos \theta_{N_1+1-k}) \quad (1)$$

$$\Delta l_i = \sum_{k=1}^{\frac{N_2}{2}} f_{ik} (F_k \cos \theta_k - F_{N_2+1-k} \cos \theta_{N_2+1-k}) \quad (2)$$

(11)

که در آنها $f_{ik}^{(1)}$ و $f_{ik}^{(2)}$ به ترتیب ضرائب ماتریس نرمی برجهای اول و دوم بوده و چنانچه سختی خمشی برجهارابه ترتیب $E_1 I_1$ ، $E_2 I_2$ و H_i ارتفاع برج از محل کابل i م تا پایه باشد مقدار ضرائب ماتریس نرمی عبارتند از :

$$f_{ik}^{(1)} = \frac{H_k^2}{6 E_1 I_1} (3 H_i - H_k) \quad (12)$$

$$f_{ik}^{(2)} = \frac{H_k^2}{6 E_2 I_2} (3 H_i - H_k)$$

بنابراین مقدار تغییر مکان پل ، y ، با معلوم بودن ضرائب a_m ، b_m ، c_m و مقادیر R_1 و R_2 و نیروی کابلها بدست خواهد آمد . هما نظور کسه مشاهده می شود از آنجا که در محاسبه a_m مقدار F_{iy} بایستی معلوم باشد و محاسبه F_{iy} مستلزم تعیین تغییر مکان عرشه پل می باشد . مسئله فوق رفتاری غیرخطی داشته و بایستی از روشهای تکراری جهت تحلیل آن کمک گرفت . از طرف دیگرهما نظور که در رابطه (۱۵) نشان داده شده است سختی کابل ثابت نبوده و تابع مقدار نیروی آن و طول آن می باشد که باروابط فوق می توان اثرات غیرخطی بودن رفتار کابل را نیز در تحلیل این گونه پلها در نظر گرفت .

معادلات بدست آمده برای نیروها و تغییر مکانهای اعضا می توان از یکی از روش زیر که در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته است بدست آورد :

حل معادلات حاکم بر رفتار پلهای کابلی ایستا به روش "همگرایی تکراری" همان نظور که قبلاً بیان گردید معادله تغییر شکل عرشه پل (معادله ۶) بستگی به مقادیر ضرائب a_m ، b_m و c_m دارد که این ضرائب به

مقادیر نیروی کابلها مربوط می‌شود (معادله ۴) و همچنین نیروی کابلها بطور غیرخطی به مقادیر تغییر شکل عرشه در نقاط اتصال کابلها وابسته است (معادله ۸ و ۹ و ۱۰) بنا براین تعیین مقادیر نیروهای داخلی و تغییر مکانها بصورت یک روش همگرایی تکراری بدست خواهند آمد. در این روش مراحل زیر بصورت قدم به قدم انجام گرفته و در نهایت نیروها و تغییر شکلها بدست خواهند آمد:

۱ - مقادیر اولیه برای نیروی کابلها (مثلاً "نیروی صفر برای کلیه کابلها) انتخاب می‌گردد.

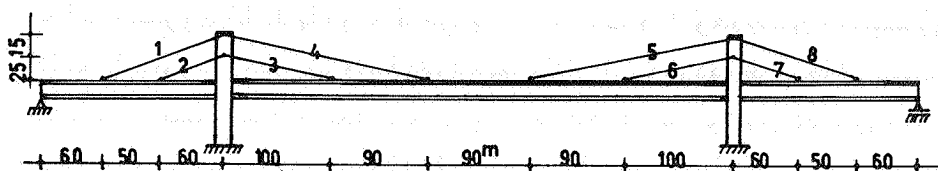
۲ - مقادیر a_m و b_m و c_m از روابط (۴) و (۵) تعیین می‌شوند.

۳ - مقادیر R_1 و R_2 از رابطه (۷) بدست آمده و معادله تغییر شکل برای هر نقطه در عرشه تیر پل از رابطه (۶) بدست می‌آید.

۴ - تغییر مکانهای افقی برجها از روابط (۱۲ و ۱۱) تعیین و نیروی کابلها از روابط (۱۰، ۹، ۸) بدست می‌آیند. لازم به یادآوری است که در اینجا اثرات غیرخطی ماده‌ای کابلها در محاسبات منظور گردیده است.

۵ - مقادیر بدست آمده برای نیروی کابلها با مقادیر فرض شده در اولین قدم مقایسه گردیده و چنانچه تفاوت زیاد داشته باشند قدمهای اول تا پنجم تکرار می‌گردد تا نهایتاً "نیروی کلیه کابلها به سوی مقادیر حقیقی همگرا گردند.

روش فوق در مرجع [۵] برای رفتار خطی کابلها مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی ماده‌ای برای کابلها یک برنامه کامپیوتری بر اساس روش همگرایی تکراری تنظیم گردیده و مثالهای متنوعی مورد مطالعه قرار گرفته است از آن جمله سازه کابلی صفحه بعد توسط این روش مورد بررسی قرار گرفته که نتایج تحلیل خطی آن به شرح صفحه بعد می‌باشد.



شکل (۴)

مدول الاستیسته عرشه پل، برجها و کابلها $E_G = E_1 = E_2 = E_e = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

بارگسترده و یکنواخت در طول پل $q = 6000 \text{ kg/m}$

سطح مقطع کابلها $A_i = 0.01 \text{ m}^2$

ممان اینرسی عرشه پل $I_G = 10 \text{ m}^4$

ممان اینرسی برجها $I_1 = I_2 = 10 \text{ m}^4$

i	X_i (m)	Y_i (m)	Δ_i (m)	F_i kg
۱	۶۰	-۰/۱۷۷۵۱۲	۰/۱۱۱۱۴۷	۷۸۵۶۵/۳۵
۲	۱۱۰	-۰/۲۷۵۸۹۳	۰/۰۵۳۰۰۶	-۱۸۴۷۲۸/۲
۳	۲۷۰	۲/۰۳۸۹۷۵	-۰/۰۵۳۰۰۶	۹۰۲۷۰۷/۲
۴	۳۶۰	۳/۶۵۸۷۷۳	-۰/۱۱۱۱۴۷	۶۹۷۵۷۳/۶۴
۵	۴۵۰	۳/۶۵۸۷۷۳	-۰/۱۱۱۱۴۷	۶۹۷۵۷۳/۳
۶	۵۴۰	۲/۰۳۸۹۸۲	-۰/۰۵۳۰۰۶	۹۰۲۷۱۲/۶۲
۷	۷۰۰	-۰/۲۷۵۸۹۹	۰/۰۵۳۰۰۶	-۱۸۴۷۳۹/۷۲
۸	۷۵۰	-۰/۱۷۷۵۱۸	۰/۱۱۱۱۴۸	۷۸۵۶۳/۳۶

$$R_1 = +1985137.59 \text{ kg}$$

$$R_2 = +1985128.25 \text{ kg}$$

از نقاط ضعف این روش یکی اینکه وقت مصرف شده زیاد بوده و دیگر اینکه همگرایی تضمین شده‌ای برای جوابها وجود ندارد به بیان دیگر بعنوان مثال اگر در همین سازه سطح مقطع کابلها را ۵ برابر کنیم همگرایی سازه بسیار کندتر گرفته و خطاهای محاسباتی شروع به زیاد شدن می‌کند. همانطور که از جوابها مشاهده می‌شود نیروی ایجاد شده در کابلها ۲ و ۷ منفی بوده و این مبین این مطلب است که این کابلها در تحمل باربری نقشی ندارند مسئله فوق در انتخاب سیستم کابلها، موقعیت آنها از نظر طراحی سیستمهای پلها یا کابلی ایستابسیار قابل اهمیت می‌باشد. البته در این روش همگرایی می‌توان در هر مرحله از محاسبات چنانچه تعدادی از کابلها در فشار باشند در مرحله بعدی این کابلها را حذف نمود.

حل معادلات حاکم بر رفتار پلها یا کابلها با استفاده از روش ماتریس سختی-نرمی : همانطور که در روش فوق ملاحظه می‌گردد از معادلات (۶) تا (۱۲) می‌توان تغییر مکان عرشه پل و برج، نیروهای داخلی آنها و هم‌چنین نیروی کابلها را با زای بارگذاری خارجی بدست آورد. چنانچه بار خارجی بصورت بار گسترده یکنواختی به شدت q در فاصله x_0 تا x_E از ابتدای عرشه مطابق شکل اثر نماید روابط (۶) و (۷) با استفاده از (۴) و (۵) و فرض

$$\alpha_m = \left(\frac{m\pi}{l_G} \right)^4 \frac{EI l_G}{2} \quad \text{بصورت زیر خواهد بود:}$$

$$Y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \left[\frac{q l_G}{m} \left(\cos \frac{m\pi x}{l_G} - \cos \frac{m\pi x_e}{l_G} \right) - \sum_{i=1}^N F_i \sin \theta_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_G} \right]$$

$$\sin \frac{m\pi x}{l_G} + R_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi \bar{l}_1}{l_G} \sin \frac{m\pi x}{l_G} \quad (13)$$

$$+ R_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G} \sin \frac{m\pi x}{l_G}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \left[\frac{q l_G}{m\pi} \left(\cos \frac{m\pi x_0}{l_G} - \cos \frac{m\pi x_e}{l_G} \right) - \sum_{i=1}^N F_i \sin \theta_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_G} \right]$$

$$\sin \frac{m\pi l_1}{l_G} + R_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi \bar{l}_1}{l_G} \quad (14)$$

$$+ R_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi \bar{l}_1}{l_G} \sin \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G} = 0 \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \left[\frac{q l_G}{m\pi} \left(\cos \frac{m\pi x_0}{l_G} - \cos \frac{m\pi x_e}{l_G} \right) - \sum_{i=1}^{\infty} F_i \sin \theta_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_G} \right]$$

$$\sin \frac{m\pi l_2}{l_G} + R_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi \bar{l}_1}{l_G} \sin \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G}$$

$$+ R_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G} = 0 \quad (15)$$

چنانچه مقادیر تغییر مکان عرشه پیل را در محل اتصال کابلها به عرشه ، Y_i ، محاسبه نموده و فرض کنیم :

$$A_{im} = \frac{q l_G}{\alpha_m m\pi} \left(\cos \frac{m\pi x_0}{l_G} - \cos \frac{m\pi x_e}{l_G} \right) \sin \frac{m\pi x_i}{l_G}$$

$$\bar{A}_{1m} = \frac{q l_G}{m \pi \alpha_m} \left(\cos \frac{m \pi x_0}{l_G} - \cos \frac{m \pi x_e}{l_G} \right) \sin \frac{m \pi \bar{l}_1}{l_G}$$

$$\bar{A}_{2m} = \frac{q l_G}{m \pi \alpha_m} \left(\cos \frac{m \pi x_0}{l_G} - \cos \frac{m \pi x_e}{l_G} \right) \sin \frac{m \pi \bar{l}_2}{l_G} \quad (16)$$

در این صورت داریم :

$$y_i + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \left(\sum_{j=1}^{\infty} F_j \sin \theta_j \sin \frac{m \pi x_j}{l_G} \right) \sin \frac{m \pi x_i}{l_G}$$

$$- R_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m \pi \bar{l}_1}{l_G} \sin \frac{m \pi x_i}{l_G}$$

$$- R_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m \pi \bar{l}_2}{l_G} \sin \frac{m \pi x_i}{l_G} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{im} \quad (17)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \left(\sum_{j=1}^{\infty} F_j \sin \theta_j \sin \frac{m \pi x_j}{l_G} \right) \sin \frac{m \pi \bar{l}_1}{l_G}$$

$$- R_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m \pi \bar{l}_1}{l_G} - R_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m}$$

$$\sin \frac{m \pi \bar{l}_1}{l_G} \sin \frac{m \pi \bar{l}_2}{l_G} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_{1m} \quad (18)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \left(\sum_{j=1}^{\infty} F_j \sin \theta_j \sin \frac{m\pi x_j}{l_G} \right) \sin \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G}$$

$$- R_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi \bar{l}_1}{l_G} \sin \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G}$$

$$- R_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi \bar{l}_2}{l_G} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_{2m} \quad (19)$$

در ضمن با فرض علامت مثبت برای تغییر شکل برج ها، Δ_i ، وقتی به سمت راست حرکت کنند، برای $\frac{N_1}{2}$ و $\frac{N_2}{2}$ کابل های سمت چپ اولین و دومین برج داریم:

$$K_i Y_i \sin \theta_i + K_i \Delta_i \cos \theta_i - F_i = 0 \quad (20-الف)$$

و برای $\frac{N_2}{2}$ و $\frac{N_1}{2}$ کابل های سمت راست اولین و دومین برج داریم:

$$K_i Y_i \sin \theta_i - K_i \Delta_i \cos \theta_i - F_i = 0 \quad (20-ب)$$

علاوه بر آن تغییر مکان برجها، Δ ، از روابط (۱۱) تعیین می گردند. مجموعه روابط (۱۱)، (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) و (۲۰) شامل $2 + \frac{5N}{2}$ و معادله و $2 + \frac{5N}{2}$ مجهول Y_i ($i=1, N$)، F_i ($i=1, N$)، R_1 و R_2 و Δ_i ($i=1, \frac{N}{2}$) می باشد. چنانچه آنها را بصورت یک معادله ماتریسی بنویسیم، مجهولات از نوع ماتریس سختی-نرمی می باشد. لازم به تذکر است که تعیین مجهولات در تحلیل غیرخطی ماده ای و هندسی سیستم آسانی میسر خواهد بود.

تحلیل خطی و غیرخطی ...

	$N = N_1 + N_2$	2	N_1	N_2	$\frac{N_1}{2}$	$\frac{N_2}{2}$		
$N = N_1 + N_2$	I	R	S	O	y_1	y_2	y_3	\vdots
					$y_{N_1+N_2}$	R_1	R_2	\vdots
2	O	FE	SS	O				
N_1	KS	O	-(I)	KC	F_1	F_2	F_3	\vdots
					F_{N_1}	F_{N_1+1}	$F_{N_1+N_2}$	\vdots
N_2								
$\frac{N_1}{2}$	O	O	FE	I	Δ_1	Δ_2	\vdots	$\Delta_{\frac{N_1}{2}}$
					$\Delta_{\frac{N_1+N_2}{2}}$	\vdots	$\Delta_{\frac{N_1+N_2}{2}}$	
$\frac{N_2}{2}$								

ما تریس فوق ما تریس سختی نرمی کل سازه می باشد که زیرما تریسها به شرح صفحات بعد هستند

استقلال

$$R_{N \times 2} = \begin{bmatrix} -\sum_{m=1}^s \frac{1}{\alpha_m} \left(\sin \frac{m \pi l_1}{l_G} \sin \frac{m \pi x_1}{l_G} \right) & -\sum_{m=1}^s \frac{1}{\alpha_m} \left(\sin \frac{m \pi l_2}{l_G} \sin \frac{m \pi x_1}{l_G} \right) \\ -\sum_{m=1}^s \frac{1}{\alpha_m} \left(\sin \frac{m \pi l_1}{l_G} \sin \frac{m \pi x_2}{l_G} \right) & -\sum_{m=1}^s \frac{1}{\alpha_m} \left(\sin \frac{m \pi l_2}{l_G} \sin \frac{m \pi x_2}{l_G} \right) \\ \vdots & \vdots \\ -\sum_{m=1}^s \frac{1}{\alpha_m} \left(\sin \frac{m \pi l_1}{l_G} \sin \frac{m \pi x_N}{l_G} \right) & -\sum_{m=1}^s \frac{1}{\alpha_m} \left(\sin \frac{m \pi l_2}{l_G} \sin \frac{m \pi x_N}{l_G} \right) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_{1k}^{(1)} \cos \theta_k & -f_{1, N_1+1-k}^{(1)} \cos \theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{i, k - \frac{N_1}{2}}^{(2)} \cos \theta_k & f_{i, \frac{3N_1}{2} + N_2 + 1 - k}^{(2)} \cos \theta_k \end{bmatrix}$$

$i = 1, \frac{N_1}{2}$ $i = \frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_1 + N_2}{2}$
 $k = 1, N_1$ $k = N_1 + 1, N_1 + N_2$

$$KS_{N \times N} = \begin{bmatrix} K_1 \sin \theta_1 & & & \\ & K_2 \sin \theta_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & K_N \sin \theta_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi x_1}{l_G} \sin \theta_1 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_1}{l_G} \sin \theta_2 & \dots & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_1}{l_G} \sin \theta_N \\
 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_2}{l_G} \sin \theta_1 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi x_2}{l_G} \sin \theta_2 & \dots & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_2}{l_G} \sin \theta_N \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_N}{l_G} \sin \theta_1 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_N}{l_G} \sin \theta_2 & \dots & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi x_N}{l_G} \sin \theta_N
 \end{bmatrix}$$

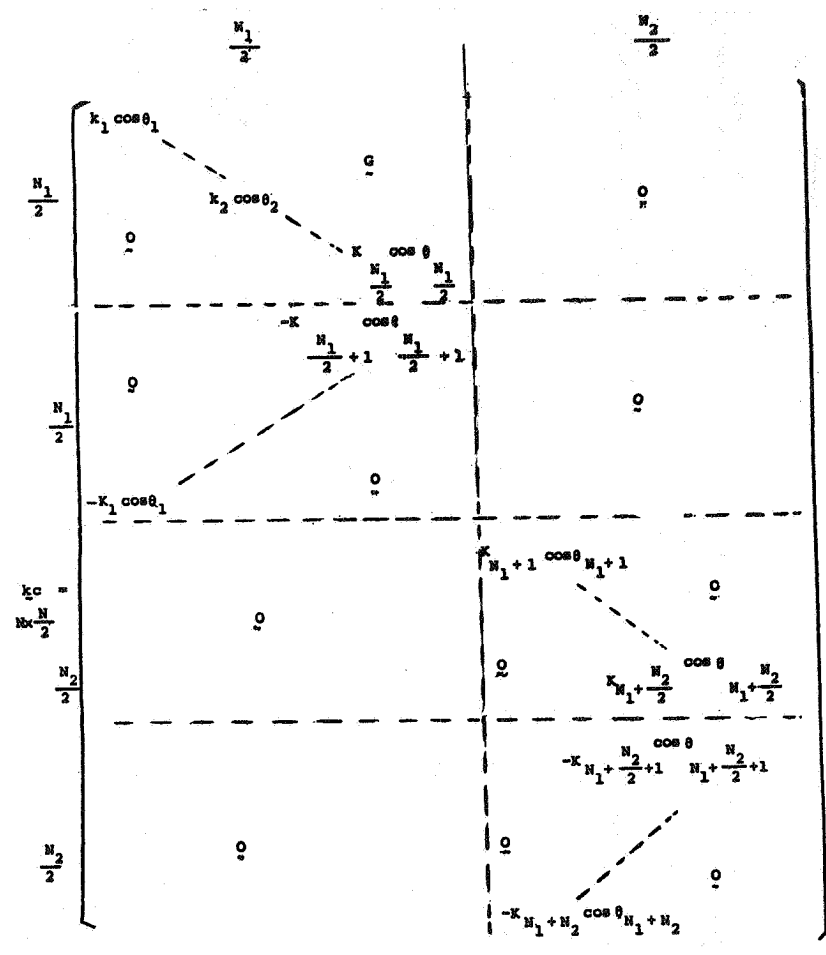
$S_{N \times N}$

تحلیل خطی و غیرخطی ...

$$\begin{bmatrix}
 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_1}{l_G} \sin \theta_1 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_1}{l_G} \sin \theta_2 & \dots & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_1}{l_G} \sin \theta_N \\
 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_2}{l_G} \sin \theta_1 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi x_2}{l_G} \sin \theta_2 & \dots & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_2}{l_G} \sin \theta_N \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_N}{l_G} \sin \theta_1 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi x_N}{l_G} \sin \theta_2 & \dots & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi x_N}{l_G} \sin \theta_N
 \end{bmatrix}$$

$S_{2 \times N}$

استقلال



$$\begin{matrix}
 E_{22} \\
 \begin{matrix}
 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi l_1}{l_G} & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi l_1}{l_G} \sin \frac{m\pi l_2}{l_G} \\
 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin \frac{m\pi l_1}{l_G} \sin \frac{m\pi l_2}{l_G} & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi l_2}{l_G}
 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

اگر ما تریس ضرائب دستگامه معادلات فوق را با SF و بردار مجهولات را با x و بردار کمیت‌های حاصل از بارگذاری را با I نمایش دهیم داریم:

$$[SF]\{x\} = I \quad (22)$$

در این صورت جواب معادله فوق عبارتست از:

$$x = [SF]^{-1} I$$

با استفاده از روش فوق می‌توان تحلیل خطی و غیرخطی سیستم‌های پله‌های کابلی ایستار را تعیین نمود.

الف: رفتار خطی: چنانچه از رفتار غیرخطی کابلها و دیگر اعضای سازه صرف نظر شود در این صورت ضرائب ما تریس SF بصورت ثابت و مشخص تعیین گردیده و با استفاده از رابطه (۲۳) می‌توان نیروی کابلها، عکس‌العمل‌های برجها و تغییر مکان‌های برج و عرشه را بدست آورد.

ب: رفتار غیرخطی: در این حالت ضرائب ما تریس SF ثابت نبوده و خود تابعی از مجهولات نیرویی و تغییر مکانی سیستم می‌باشد. برای بدست آوردن مقادیر دقیق این ضرائب از روش تکراری استفاده کرده و در هر مرحله از محاسبات، اجزاء این ما تریس را بر اساس هندسه و سایر مشخصات نیرویی و تغییر مکانی مرحله قبل بدست آورده و مجدداً "مجهولات نیرویی و تغییر مکانی" را بدست می‌آوریم و این عملیات را تا آنجا دنبال می‌کنیم تا کمیت‌های بدست آمده برای مجهولات نیرویی و تغییر مکانی همگرا گردند.

بر اساس روش فوق یک برنامه کامپیوتری تنظیم شده

استقلال

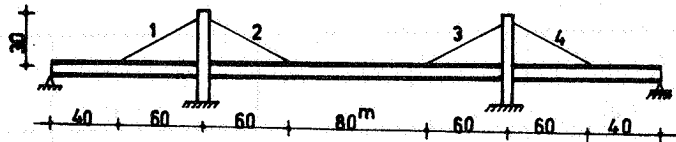
ومسائل مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است . در ابتدا برای تحقیق صحت معادلات ودقت محاسبات نتایج تحلیل خطی پل کابلی ایستگاه در شکل (۴) توسط روش " همگرایی تکراری " تحلیل گردید در اینجا نیز توسط روش " سختی نرمی " انجام گرفته وبه شرح زیر می باشد :

i	x_i m	y_i (m)	Δ_i (m)	F_i kg
۱	۶۰	- ۰/۱۷۷۵۱۲۲	۰/۱۱۱۱۴۷۳	۷۸۵۶۹/۴۲۳
۲	۱۱۰	- ۰/۲۷۵۸۹۳	۰/۰۵۳۰۰۶	-۱۸۴۷۴۸/۶
۳	۲۷۰	۲/۰۳۸۹۳۴۱	- ۰/۰۵۳۰۰۶	۹۰۲۷۰۸/۶
۴	۳۶۰	۳/۶۵۸۶۹۹	- ۰/۱۱۱۱۴۷۳	۶۹۷۵۶۷/۵
۵	۴۵۰	۳/۶۵۸۷۰۰۱	- ۰/۱۱۱۱۴۷۳	۶۹۷۵۶۷/۵
۶	۵۴۰	۲/۰۳۸۹۳۵۲	- ۰/۰۵۳۰۰۶	۹۰۲۷۰۸/۶
۷	۷۰۰	- ۰/۲۷۵۸۹۲۴	۰/۰۵۳۰۰۶	-۱۸۴۷۴۷/۹
۸	۷۵۰	- ۰/۱۷۷۵۱۱۵	۰/۱۱۱۱۴۷۳	۷۸۵۶۹/۸

$$R = 1985116.97 \text{ kg}$$

$$R_1 = 1985116.97 \text{ kg}$$

هما نطور که مشاهده می شود نتایج بدست آمده بسیار نزدیک به نتایج سازه فوق از روش " همگرایی تکراری " می باشد . در مثال شکل صفحه بعد با استفاده از روش " سختی نرمی " نتایج تحلیل خطی مورد بررسی قرار گرفته است که به شرح صفحه بعد می باشد :



شکل (۵)

سطح مقطع کابلها = 0.1 m^2

ممان اینرسی برجها = $I_1 = I_2 = 20 \text{ m}^4$

ممان اینرسی عرشه پل = $I_G = 20 \text{ m}^4$

مدول الاستیسیته عرشه و برجها و کابلها = $E_G = E_1 = E_2 = E_C = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

بار گسترده یکنواخت در طول عرشه = 2000 kg/m

نتایج تحلیل خطی سازه فوق عبارتست از :

i	X_i (m)	Y_i (m)	Δ_i (m)	F_i kg
۱	۴۰	۰/۰۰۰۰۹۹۷	۰/۰۰۱۶۸۸۱	۴۸۶۶۲/۰۶
۲	۱۶۰	۰/۰۱۳۱۴۳۱	- ۰/۰۰۱۶۸۸۱	۱۳۶۷۳۶/۹۸
۳	۲۴۰	۰/۰۱۳۱۴۳۱	- ۰/۰۰۱۶۸۸۱	۱۳۶۷۳۶/۹۸
۴	۳۶۰	۰/۰۰۰۰۹۹۷	۰/۰۰۱۶۸۸۱	۴۸۶۶۲/۰۶

$R_1 = 266218.3 \text{ kg}$

$R_2 = 266218.3 \text{ kg}$

و نتایج تحلیل غیرخطی سازه فوق عبارتست از :

i	X_i (m)	Y_i (m)	i (m)	F_i kg
۱	۴۰	- ۰/۰۰۱۵۹۵۸	۰	۰
۲	۱۶۰	۰/۰۲۴۴۱۴۸	۰	۰
۳	۲۴۰	۰/۰۲۴۴۱۴۸	۰	۰
۴	۳۶۰	- ۰/۰۰۱۵۹۵۸	۰	۰

$$R_1 = 356250.5 \text{ kg}$$

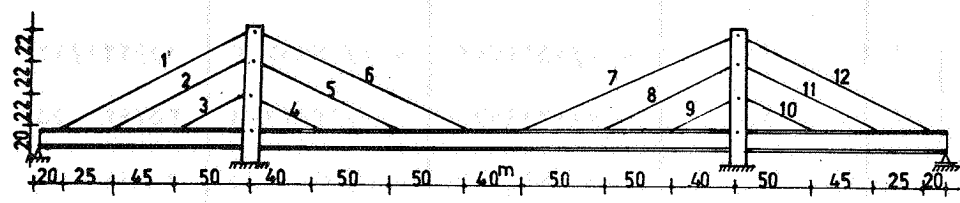
$$R_2 = 356250.5 \text{ kg}$$

همانطور که از نتایج دو حالت " رفتار خطی " و " رفتار غیرخطی " ملاحظه می شود تفاوت فاحشی بین آنها وجود دارد بطوریکه در تحلیل غیرخطی نیروی تمامی کابلها صفر گردیده است و کابلها هیچگونه نقشی در باربری سازه ایفاء نمی نمایند.

عامل موثر در این تفاوت زیاد، رفتار غیرخطی ماده ای کابلها می باشد که توسط رابطه (۱) بیان گردید. در مثال فوق وضعیت قرار گرفتن کابلها روی سازه و هم چنین سختی خمشی عرشه پیل و برج طوری است که نیروی لازم برای بکار افتادن موثر در کابلها بوجود نمی آید و سازه بصورت کاملاً خمشی عمل خواهد کرد. نکته فوق اهمیت زیادی در انتخاب آرایش کابلها در پلهای کابلی ایستار دارد و بوسیله روش آنالیز فوق می توان آرایش بهینه و مناسب را بدست آورد.

برای تحقیق موضوع اخیر سازه شکل صفحه بعد را در نظر

بگیرید:



شکل (۶)

$$A_1 = A_6 = A_7 = A_{12} = 0.04 \text{ m}^2$$

$$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_8 = A_9 = A_{10} = A_{11} = 0.018 \text{ m}^2$$

$$\text{عرشه } I_G = 1.5 \text{ m}^4$$

$$E_c = E_1 = E_2 = E_4 = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{برجها } I_1 = I_2 = 1 \text{ m}^4$$

$$\text{وزن مخصوص کابلها } \gamma_c = 7800 \text{ kg/m}^3$$

شدت بار گسترده روی عرشه = q

نتایج تحلیل خطی و غیرخطی سازه شکل (۶) به ترتیب در جدا اول صفحه‌های بعد آمده است.

i	X_i (m)	Y_i (m)	Δ_i (m)	F_i ton
۱	۲۰	- ۰/۰۵۲۲۷۰۲	+ ۰/۱۷۹۰۳۵۳	۸۵۶۲۴۱/۱۴
۲	۴۵	- ۰/۷۷۱۹۹۷	۰/۱۳۸۳۲۰۹	۳۵۷۶۳۲/۵۵
۳	۹۰	۰/۰۷۹۵۷۹۴	- ۰/۰۹۷۶۰۶۵	۴۲۸۶۷۰/۰۶
۴	۱۸۰	۰/۲۸۹۱۹۳۹	- ۰/۰۹۷۶۰۶۵	۳۵۵۲۴۷/۴۷
۵	۲۳۰	۰/۶۴۲۱۷۸۲	- ۰/۱۳۸۳۲۰۹	۵۱۵۸۸۲/۱
۶	۲۸۰	۰/۷۷۵۲۱۵۹	- ۰/۱۷۹۰۳۵۳	۷۷۶۵۶۲/۹۷
۷	۳۲۰	۰/۷۷۵۲۱۵۹	- ۰/۱۷۹۰۳۵۳	۷۷۶۵۷۲/۸۱
۸	۳۷۰	۰/۶۴۲۱۷۸۲	- ۰/۱۳۸۳۲۰۸	۵۱۵۸۷۱/۵۶
۹	۴۲۰	۰/۲۸۹۱۹۳۹	- ۰/۰۹۷۶۰۶۲	۳۵۵۲۶۰/۱۷
۱۰	۵۱۰	- ۰/۰۷۹۵۷۸۵	۰/۰۹۷۶۰۶۲	۴۲۸۶۶۹/۹۵
۱۱	۵۵۵	- ۰/۰۷۷۱۹۸۵	۰/۱۳۸۳۲۰۸	۳۵۷۶۳۳/۷۹
۱۲	۵۸۰	- ۰/۰۵۲۲۶۹۳	۰/۱۷۹۰۳۵۵	۸۵۶۲۴۴/۵۸

$$R_1 = 554630.2$$

$$R_2 = 552626.4$$

نتایج تحلیل خطی سازه شکل (۶)

i	X_i (m)	Y_i (m)	Δ_i (m)	F_i ton
۱	۲۰	- ۰/۰۵۷۸۳۱۸	۰/۲۰۱۲۳۸۷	۸۱۶۰۷۹/۵
۲	۴۵	۰/۰۹۱۳۲۳۰	۰/۱۵۷۵۵۶۱	۳۵۸۳۱۶/۱
۳	۹۰	- ۰/۱۰۱۵۱۰۹	۰/۱۱۳۸۷۳۴	۴۶۹۸۴۳/۷
۴	۱۸۰	۰/۳۲۳۰۹۷۲	-۰/۱۱۳۸۷۳۴	۳۵۲۱۰۲/۸
۵	۲۳۰	۰/۷۳۱۹۶۲۳	-۰/۱۵۷۵۵۶۱	۵۷۲۱۲۹/۲
۶	۲۸۰	۰/۹۱۹۵۲۳۵	-۰/۲۰۱۲۳۸۷	۷۱۸۱۸۲/۹
۷	۳۲۰	۰/۹۱۹۵۲۶۷	-۰/۲۰۱۲۳۹۴	۷۱۸۱۹۴/۵۸
۸	۳۷۰	۰/۷۳۱۹۵۵۴	-۰/۱۵۷۵۵۶۲	۵۷۲۱۱۷/۲۳
۹	۴۲۰	۰/۳۲۳۰۹۹۹	-۰/۱۱۳۸۷۳	۳۵۲۱۱۶/۵
۱۰	۵۱۰	-۰/۱۰۱۵۱۰۴	۰/۱۱۳۸۷۳	۴۶۹۸۴۲/۷
۱۱	۵۵۵	-۰/۰۹۱۳۲۲۵	۰/۱۵۷۵۵۶۲	۳۵۸۳۱۷/۷
۱۲	۵۸۰	-۰/۰۵۷۸۳۱۴	۰/۲۰۱۲۳۹۴	۸۱۶۰۸۷/۲

نتایج تحلیل غیرخطی سازه شکل (۶)

نتایج فوق نشان می‌دهد که شکل قرارگیری کابلها طوری است که در تمام می کابلها نیروی کافی برای بکار افتادن موثر ایجاد کرده و اثرات غیرخطی آنها را بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد. لذا یک روش

مناسب برای کاهش اثرات غیرخطی در سازه‌های کابلی این است که کابلها را پیش تنیده کنیم که در قسمت دیگر مشروحا "به آن اشاره خواهد شد".

مراجع

1. Podolny, W., Fleming, J.F., "Historical Development of Cable Stayed Bridges", ASCE Journal of Structural Engineering vol. 98, No. ST9, 1972 .
2. Tang, M.C., "Design of Cable Stayed Girder Bridges", ASCE Journal of Structural Engineering vol. 98, No. ST8, 1972
3. Troisttsky, M.S., Cable Stayed Bridges, First ed., William Clowes and Sons, London, 1977 .
4. "Commentary On The Tentative Recommendation for Cable Stayed Bridge Structures", ASCE Journal of Structural Engineering, vol. 103, No. ST5, 1977.
5. Baron, F., Ying Lien, S., "Analytical Studies of a Cable Stayed Girder Bridge", Computer and Structures, vol. 3, PP. 443-465, Pergamon Press 1973 .
6. Lazer, B.E., "Stiffness of Cable Stayed Bridges", ASCE Journal of Structural Engineering vol, 98, No. ST7, 1972.
7. Hejab, H., "Energy Analysis of Cable Stayed Bridge", ASCE Journal of Structural Engineering, vol, 112, No. 5, 1986 .

8. Lazer, B.E., Troitsky, M.S., and Douglass, M.M., "Load Balancing Analysis of Cable Stayed Bridges", ASCE Journal of Structural Engineering, vol. 98, No. ST8, 1972.