

آنالیز دینامیکی سیستم‌های سازه‌ای خطی با ایزولاتورهای ارتعاشی غیرخطی به روش رویهم گذاری موده‌ها

محمد مهدی سعادت پور*

چکیده

سیستم‌های سازه‌ای زیادی با رفتار غیر خطی موضعی یافت می‌شوند. یک سازه خطی متکی بر ایزولاتور ارتعاشی غیر خطی یک مثال نمونه عملی اینگونه سیستمها می باشد. چنین سیستمی برای محافظت سازه اصلی در مقابل زلزله، در صورت وقوع این پدیده، مورد استفاده قرار می گیرد.

آنالیز دینامیکی این سیستمها با استفاده از برنامه‌های کامپیوتری غیر خطی با اهداف چند منظوره، اقتصادی نبوده و لذا یک الگوریتم کارآ می تواند بسیار با صرفه باشد. اگر یک خط مرزی برای تمایز سازه خطی از ایزولاتورهای ارتعاشی غیر خطی پایه با درجات آزادی مشترک فرض شود، این قسمتها را می توان به طور جداگانه آنالیز نمود و به حل نهایی رسید. البته، جایجاییهای درجات آزادی مشترک در هر دو سیستم یکسان بوده و این امر می تواند برای مربوط ساختن حل‌های استخراج شده مورد استفاده قرار گیرد. برای آنالیز سیستم سازه اصلی خطی روش رویهم گذاری موده‌ها به خدمت گرفته می شود. اگر عکس‌العمل سیستم تنها شامل اثر تعداد کمی از موده‌های طبیعی ارتعاش باشد، رجحان این روش پیشنهادی روشن تر خواهد شد.

* استادیار دانشکده عمران - دانشگاه صنعتی اصفهان

مقدمه

کاربرد ایزولاتورهای ارتعاشی برای محدود نمودن اثرات ارتعاشی به عنوان راه حلی مطمئن برای کاهش نیروهای القایی زلزله به ساختمانها، از جمله مسائل مهم مطروحه در مبحث مهندسی زلزله است که نه تنها مراحل اولیه تحقیقاتی خود را طی نموده بلکه در موارد متعددی جنبه عملی نیز به خود گرفته است و در حال حاضر از این ایده جدید در طراحی ساختمانها در مقابل حرکت شدید زلزله استفاده می شود و هر روز که می گذرد به طور گسترده تری مورد استقبال قرار می گیرد [۱]. کارکرد چنین ایزولاتورهایی رامی توان به طور خلاصه استفاده از یک لایه یا یک سیستم رابط انعطاف پذیر بین سازه و منبع ارتعاشی که عموماً " زمین است تلقی نمود. این لایه نرم باعث تغییر در فرکانس اصلی سازه و انتقال این فرکانس از منطقه جذب انرژی بیشتر به منطقه جذب انرژی کمتری شود. اگرچه برای مطالعه سیستماتیک پدیده عایق ارتعاشی استفاده از یک سیستم ایزولاتور با رفتار خطی ساده تر خواهد بود، لیکن در عمل عموماً " ایزولاتورهای وجود دارند که رفتار آنها غیر خطی و هیستریزیس بوده که نوع ساده آن ممکن است رفتار الاستیک - پلاستیک داشته باشد [۲] و [۳]. این رفتار رامی توان مرکب از دو فاز دانست که فاز اول الاستیک و سخت بوده به طوری که ایستایی سازه را در مقابل ارتعاشات کم دامنه نظیر ارتعاشات نیروی باد حفظ کرده و فاز دوم پلاستیک و نرم می باشد به نحوی که پریود سازه اصلی را افزایش داده که در نتیجه آن ضریب تشدید دینامیکی کاهش می یابد. بنابراین آنالیز یک سیستم سازه اعم از سازه های ساختمانی نظیر مجموعه بناهای

ساختمانی و غیرساختمانی مثل پلها و نیروگاهها و خصوصا سیستم لوله‌گذاری این نیروگاهها با اجزای خاص موضعی غیرخطی که عمدتاً در درجات آزادی پایه‌ها تعبیه می‌گردند از جمله مسائلی است که امروزه مورد علاقه طراحان این گونه‌سازه‌ها می‌باشد. این اجزای خاص در حقیقت همان ایزولاتورهای ارتعاشی هستند که برای مقابله با زلزله در مقابل نیروهای ناشی از زلزله بکار می‌روند. وجود گسترده برنامه‌های تجاری و مفصل کامپیوتری برای آنالیز سیستم‌های الاستیک و غیرا الاستیک به ما اجازه می‌دهد که چنین آنالیزی را حداقل از نقطه نظر تئوریک و بدون توجه به جنبه‌های اقتصادی مساله انجام دهیم، اما از آنجا که استفاده از یک برنامه جامع و کلی کامپیوتری غیرخطی برای آنالیز سیستم‌های سازه‌ای که فقط در تعداد خاص درجات آزادی دارای رفتار غیرخطی هستند مقرون به صرفه نبوده، بایستی به دنبال راه‌حلی بود که در آن این جنبه مساله قویاً مراعات شده باشد [۴] و [۵].

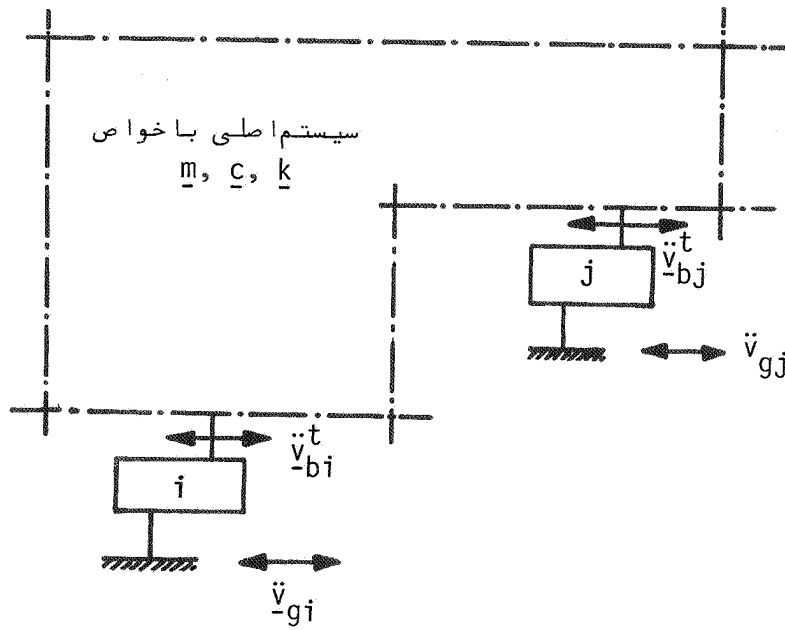
در مقاله حاضر هدف ما توسعه روشی است که به کمک آن قادر به تحلیل سازه‌های خطی یا تکیه‌گاه‌های غیرخطی باشیم. اصولاً هنگامی که سازه‌های ایزولاتورهای ارتعاشی در تبدیل ویژگی‌های دینامیکی سازه استفاده می‌شود، تحریک مودهای ارتعاشی بالاتر سازه اصلی به مراتب کاهش می‌یابد و لذا اگر رفتار سازه خطی بوده و فرض کنیم که آنالیز کل سیستم به روش رویهم‌گذاری مودها با انتخاب تعداد محدودی از مودها صورت می‌گیرد، برای دستیابی به تقریب یا دقت یکسانی در شرایط فرضی عدم وجود ایزولاتورها، در حالت اخیر به شرکت دادن تعداد کمتری از مودها در آنالیز نیاز داریم. بنا بر این اگر رفتار ایزولاتورها غیرخطی بوده و بتوان به نحوی دو سیستم خطی سازه اصلی و سیستم پایه با اجزای غیرخطی را به طور مجزا اما همزمان آنالیز نمود، می‌توان از مزیت رویهم‌گذاری مودها در آنالیز سیستم استفاده کرد. تعداد مودهای انتخاب شده در تحلیل سازه اصلی در حالتی که اجزای پایه بسیار نرم انتخاب شده باشند ممکن است تنها در حد یک مود، یعنی مود اصلی، باشد. راه حل ارائه شده مبتنی است بر استفاده از شکل مودهای ارتعاش آزاد سازه با شرایط

تکیه‌گاهی ثابت برای آنالیز همان سازه در شرایطی که متکی بر یک سیستم پایه غیرخطی بوده و توسط سیگنال‌های شتاب متفاوت در پایه‌های مختلف به ارتعاش درآید. بنا بر این علاوه بر اینکه راه حل ارائه شده کاملاً کلی و فراگیر بوده در مقایسه با راه حل کلاسیک استفاده از برنامه‌های موجود غیرخطی (برای آنالیز مسائل خطی با تعداد محدودی درجات آزادی غیرخطی) به نحو چشم‌گیری اقتصادی تر است به طوری که اصولاً نیازی به ترمیم قدم به قدم ماتریس سختی کل سازه در هر قدم محاسباتی و معکوس کردن آن در هر قدم برای ارزیابی نمودار جایجایی در قدم مورد نظر نیست. این نکته خصوصاً از آن نظر مهم است که در یک سیستم غیرخطی عمده مخارج محاسباتی مربوط به ارزیابی ماتریس سختی سیستم، به منظور تعیین نمودار جایجایی در هر قدم حل می‌شود. با توسعه این روش با اندک کوششی ممکن است به اصلاح برنامه‌های موجود آنالیز خطی سازه‌ها پرداخت و این برنامه‌ها را برای آنالیز سازه‌های خطی با تکیه‌گاه‌های غیرخطی و یا به طور کلی برای آنالیز سازه‌هایی با رفتار موضعی مرزی غیرخطی آماده ساخت.

مدل سیستم مورد مطالعه

سیستم مورد نظر برای مطالعه حاضر یک سیستم سازه‌ای الاستیک خطی تحت اثر حرکت شدید زمین است که تضعیف تابع زلزله ورودی آن توسط تعبیه اجزاء غیرخطی در زیر پایه مورد نظرمی باشد. این سیستم سازه‌ای ممکن است یک سازه ساختمانی، یک پل، یک سیستم لوله‌گذاری نیروگاه اتمی و یا هر سازه دیگری باشد. بنا بر این سیستم مورد نظر را که سیستم اصلی می‌نامیم مطابق شکل (۱) صرفاً با ماتریس‌های سختی k ، جرم m ، و استهلاک c و بدون در نظر گرفتن یک شکل خاص برای آن نشان می‌دهیم. جرم‌های سیستم که یا عملاً متمرکز بوده و یا معادل جرم گسترده هستند در گره‌ها (درجات آزادی) فرض می‌شوند. بنا بر این اگر سیستم مورد مطالعه یک سیستم جرم - گسترده باشد به توسط روش

اجزاء محدود تبدیل به یک سیستم جرم - متمرکزی شود. اتصال سیستم به زمین در یک یا چندین تکیه‌گاه با هر تعداد درجه آزادی لازم صورت می‌گیرد.



شکل ۱- سیستم سازه‌خطی با زیرسیستم‌های غیرخطی (ایزولاتور)

معادلات تعادل

معادلات تعادل کل سیستم به همراه ایزولاتورهای ارتعاشی را به دو دسته معادله تفکیک می‌کنیم. دسته اول معادلات تعادل سیستم اصلی به حساب می‌آید، مرزچینین سیستمی در شکل ۱ با خط - نقطه‌ها زکل سیستم جدا شده است. اگر بردار جابجایی درجات آزادی موجود در مرز سیستم اصلی

را که بین سازه اصلی و ایزولاتورها مشترک می باشد با بردار \underline{v}_b نشان دهیم معادله تعادل سیستم اصلی چنین خواهد بود [۶]:

$$m \ddot{\underline{v}} + \underline{c} \dot{\underline{v}} + \underline{k} \underline{v} + m_b \ddot{\underline{v}}_b + \underline{c}_b \dot{\underline{v}}_b + \underline{K}_b \underline{v}_b = 0 \quad (1)$$

به طوری که m ، \underline{c} ، و \underline{k} به ترتیب ماتریس های جرم، استهلاک، و سختی سازه اصلی، m_b ، \underline{c}_b ، و \underline{K}_b ماتریس های وابستگی اینرسی، استهلاک و الاستیک سازه اصلی (متحد با درجات آزادی فعال آن) براثر تحریک درجات آزادی پایه ها می باشد. اندیس فوقانی t برای "کل" بکار می رود لذا \underline{v}^t و \underline{v}_b^t به ترتیب بردار جابجائی کل سازه اصلی و بردار جابجائی کل پایه ها تلقی می شوند.

بردار جابجائی کل سازه اصلی \underline{v}^t را به صورت مجموع دو بردار جابجائی نسبی یا دینامیکی \underline{v} و جابجائی شبه استاتیکی \underline{v}_s فرض کرده و می نویسیم:

$$\underline{v}^t = \underline{v} + \underline{v}_s \quad (2)$$

با جا نشین کردن معادله (۲) در معادله (۱) و کاربرد معادله حاصل برای شرایط استاتیکی نتیجه زیر حاصل می شود

$$\underline{v}_s = \underline{I} \underline{v}_b^t \quad (\text{الف} - 3)$$

$$\underline{I} = -\underline{k}^{-1} \underline{K}_b \quad (\text{ب} - 3)$$

ماتریس \underline{I} ماتریس نفوذ استاتیکی سیستم نامیده می شود. این ماتریس در حقیقت یک ماتریس تبدیل است که اثر جابجائی واحد هر یک از درجات آزادی پایه ها را بر روی درجات آزادی اصلی بیان می کند. بنابراین:

$$\underline{v}^t = \underline{v} + \underline{I} \underline{v}_b^t \quad (4)$$

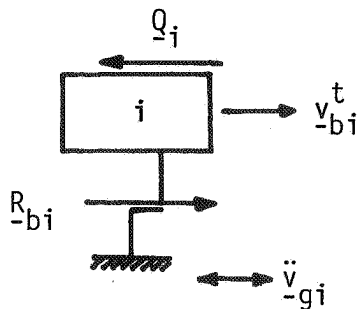
با جانشین کردن معادله (۴) در معادله تعادل (۱) خواهیم داشت :

$$\underline{m} \ddot{\underline{v}} + \underline{c} \dot{\underline{v}} + \underline{k} \underline{v} = -(\underline{m} \underline{x} + \underline{m}_b) \ddot{\underline{v}}_b^t - (\underline{c} \underline{x} + \underline{c}_b) \dot{\underline{v}}_b^t \quad (5)$$

جمله دوم سمت راست معادله (۵) در شرایطی که ماتریس‌های استهلاک \underline{c} و \underline{c}_b به ترتیب با ماتریس‌های سختی \underline{k} و \underline{k}_b متناسب باشند، حذف می‌گردد. حتی در حالتی که چنین فرضی صادق نبوده یعنی استهلاک متناسب با سختی نباشد، این جمله استهلاکی در مقایسه با نیروهای اینرسی بسیار کوچک بوده و لذا بدون از دست دادن دقت مورد لزوم به‌سادگی می‌توان از آن در مقابل جمله اول صرف‌نظر کرد. اگر وابستگی جرمی این درجات آزادی پایه‌سازه اصلی ناچیز باشد، مثلاً در حالتی که سیستم مورد مطالعه یک سیستم جرم - متمرکز باشد، ماتریس \underline{m}_b نیز حذف خواهد شد. در هر صورت، شکل ساده‌شده معادله (۵) در حالت کلی چنین می‌باشد :

$$\underline{m} \ddot{\underline{v}} + \underline{c} \dot{\underline{v}} + \underline{k} \underline{v} = -(\underline{m} \underline{x} + \underline{m}_b) \ddot{\underline{v}}_b^t \quad (6)$$

معادله (۶) یک معادله خطی است، یعنی ماتریس سختی ظاهر شده در آن مستقل از جابجایی v بوده و همواره در طول حل مساله ثابت می‌ماند. برای حل معادله (۶) نیاز به تعیین بردار شتاب $\ddot{\underline{v}}_b^t$ بوده که خود متاثر از بردار شتاب زمین $\ddot{\underline{v}}_g$ و خواص سازه و پایه‌ها است. برای تعیین بردار شتاب $\ddot{\underline{v}}_b^t$ لازم است تعادل دینامیکی پایه‌ها مورد توجه قرار گیرد. برای تعیین تعادل هر یک از اجزای ایزولاتورهای ارتعاشی دیگرم آزاد ایزولاتور i را مطابق شکل ۲ در نظر می‌گیریم. در این شکل بردار نیروهای اعمالی غیرخطی از طرف زمین به ایزولاتور ارتعاشی با R_{bi} و بردار نیروهای اعمالی از طرف سازه با Q_i نشان داده شده است. بردار جابجایی کل ایزولاتور با \underline{v}_{bi}^t علامت‌گذاری شده است.



شکل ۲- شمای یک زیرسیستم غیرخطی (ایزولاتور) همراه با بردارهای نیرو

هرگاه مجموعه اجزاء غیرخطی پایه‌ها را به‌طوریکجا در نظر بگیریم، معادله تعادل این مجموعه به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\underline{Q} + \underline{\tilde{m}}_b \underline{\ddot{v}}_b^t + \underline{\tilde{c}}_b \underline{\dot{v}}_b^t + \underline{\tilde{k}}_b \underline{v}_b^t \tag{۷}$$

$$+ \underline{m}_g \underline{\ddot{v}}_g + \underline{c}_g \underline{\dot{v}}_g + \underline{k}_g \underline{v}_g = 0$$

که در آن $\underline{\tilde{m}}_b$ ماتریس جرم نظیر درجات آزادی پایه‌ها، $\underline{\tilde{c}}_b$ ماتریس استهلاك نظیر درجات آزادی پایه‌ها و $\underline{\tilde{k}}_b$ ماتریس سختی نظیر درجات آزادی پایه‌ها است. ذکر این نکته ضروری است که در هنگام تعریف ضرایب نفوذ این ماتریس‌ها، وجود سازه اصلی بر روی سیستم پایه‌ها نادیده گرفته شده است. همچنین m ، c و k به ترتیب ماتریس‌های وابستگی جرم، استهلاك و سختی پایه‌ها یا ایزولاتورها در شرایطی هستند که شتاب، سرعت و جابجائی واحداً اعمال شده در درجات آزادی زمین صورت گرفته باشد.

برای تعیین بردار نیروهای \underline{Q} در معادله (۷) از نیروهای اینرسی سازه اصلی کمک می‌گیریم. اگر بردار نیروهای اینرسی سازه اصلی را با \underline{F}_I نشان دهیم، این بردار از طریق معادله زیر قابل ارزیابی است:

$$\underline{F}_I = \underline{m} \ddot{\underline{v}}^t \quad (۸)$$

هرگاه ماتریس تبدیل نیروهای اینرسی سازه اصلی به یک مجموعه نیروهای اینرسی معادل روی ایزولاتورها را با \underline{h} نشان دهیم به طوری که:

$$\underline{Q} = \underline{h} \underline{F}_I \quad (۹)$$

برقرار باشد، و ماتریس تبدیل \underline{h} را تعیین کنیم، به سادگی می‌توانیم سیستم نیروهای اینرسی روی هر یک از ایزولاتورها را به کمک همیسن معادله (۹) مشخص نمایم و بنویسیم:

$$\underline{Q}_i = \underline{h}_i \underline{F}_I \quad (۱۰)$$

حرکت دینامیکی درجات آزادی پایه‌ها می‌تواند مشابه با معادله (۲) چنین نوشت:

$$\underline{v}_b^t = \underline{v}_b + \underline{v}_{bs} \quad (۱۱)$$

که در آن \underline{v}_b جابجایی دینامیکی و \underline{v}_{bs} جابجایی شبه‌استاتیکی پایه‌ها است. بردار \underline{v}_{bs} به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\underline{v}_{bs} = \underline{r}_b \underline{v}_g \quad (الف - ۱۲)$$

به طوری که

$$\underline{r}_b = -\underline{k}_b^{-1} \underline{k}_g \quad (ب - ۱۲)$$

باجا نشین کردن معادلات (۱۲) و (۹) در معادله (۷) خواهیم داشت:

$$\underline{h} \underline{m} \underline{v}_b^t + \underline{m} \underline{v}_b^t + \underline{m} \underline{v}_g^t + \underline{c}_b \underline{v}_b^t + \underline{k}_b \underline{v}_b^t + (\underline{c}_g + \underline{c}_b \underline{r}_b) \underline{v}_g^t = 0 \quad (۱۳)$$

جمله آخر معادله (۱۳) در شرایطی که \underline{c}_g و \underline{c}_b به ترتیب متناسب با

\tilde{k}_g و \tilde{k}_b باشند صفر خواهد شد، حتی در حالتی که این شرط برقرار نباشد این جمله سهم بسیار ناچیزی در نیروهای مقاوم دارد و می توان از آن چشم پوشی کرد. همچنین جمله $\frac{\tilde{v}_g}{\tilde{m}_g}$ برای سیستم های جرم- متمرکز صفر بوده و در مورد سیستم های جرم- سازگار در مقایسه با دو جمله نیروهای اینرسی دیگر ناچیز است. بنا بر این:

$$\underline{h} \underline{m} \underline{\ddot{v}}^t + \tilde{m}_b \underline{\ddot{v}}_b^t + \tilde{c}_b \underline{\dot{v}}_b + \tilde{k}_b \underline{v}_b = 0 \quad (14)$$

با کابر در معادله (۴) در معادله (۱۴)، این معادله به صورت زیر درمی آید:

$$\underline{h} \underline{m} \underline{\ddot{v}} + (\underline{h} \underline{m} \underline{r} + \tilde{m}_b) \underline{\ddot{v}}_b^t + \tilde{c}_b \underline{\dot{v}}_b + \tilde{k}_b \underline{v}_b = 0 \quad (15)$$

معادله (۱۵) معادله ای است بین جا بجائی های پایه ها و جا بجائی های نسبی درجات آزادی اصلی. جمله $\frac{\tilde{v}_b}{\tilde{m}_b}$ در این معادله از اهمیت ناچیزی برخوردار بوده و می توان آن را حذف نمود. به عبارتی چون رفتار غیرخطی پایه ها مورد نظر است اتلاف انرژی حاصل از استهلاك لزج در مقایسه با رفتار غیرخطی هیستریزس و انرژی اتلافی در این رابطه جزئی است و لذا به منظور تسهیل در عملیات می توان آن را نادیده گرفت و شکل نهائی معادله (۱۵) را چنین نوشت:

$$\underline{h} \underline{m} \underline{\ddot{v}} + (\underline{h} \underline{m} \underline{r} + \tilde{m}_b) \underline{\ddot{v}}_b^t + \tilde{k}_b \underline{v}_b = 0 \quad (16)$$

معادله (۱۵) توأم با معادله (۶) کلاً شرایط تعادل کل سیستم را بیان می دارند. معادله (۱۶) معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت پایه ها یا درجات آزادی غیرخطی می باشد. در این معادله اثرات سازه اصلی در قالب جمله اول به صورت نیروهای اینرسی ظاهر می شود. همچنین در این معادله جمله $R_b = -\tilde{k}_b \underline{v}_b$ در حالت کلی یک جمله غیرخطی است که در حین حل بایستی ترمیم شود. هرگاه این معادله همراه با معادله (۶) مورد استفاده قرار گیرد، امکان دسترسی به حل کامل سیستم کل میسر می گردد. مزیت این نحوه فرموله کردن مسأله در این است که اولاً درست

چپ معادله (۶) با ماتریس خواص سیستم اصلی مواجه هستیم که همگی خطی می باشند و اگر فرضاً "تابع زمانی \dot{v}_b^t مشخص باشد این معادله را می توان به روش رویهم گذاری مودها حل نمود. ثانیاً "در معادله (۱۶) ماتریس سختی غیرخطی \hat{K}_b مجزا از کل ماتریس سختی سیستم و به عبارتی به شکل غیرکوپله ظاهر شده است. این مزیت به طوری که اکنون نشان خواهیم داد این امکان را بوجود می آورد که مسأله را به روش رویهم گذاری مودها حل نماییم و در ضمن اخلاسی در استفاده از نسبت های استهلاک سیستم سازه اصلی برای بیان مشخصه استهلاکی آن پیش نیاید. مطلب اخیراً از آن نظر مهم است که اصولاً "ساده ترین روش برای معرفی ضرایب نفوذ استهلاک یک سیستم دینا میکی بر اساس استفاده از تعریف نسبت های استهلاک در مودهای مختلف ارتعاشی آن استوار است. این معادلات به هر طریقی که حل شوند به دلیل مجزا بودن ماتریس سختی غیرخطی \hat{K}_b از بقیه اجزاء سختی سیستم، اصلاح این ماتریس در هر قدم حل به سادگی امکان پذیر می باشد. در حقیقت این نحوه فرموله کردن مسأله را می توان نوعی تراکم استاتیکی سیستم کلی دانست که اگر صورت نمی گرفت حجم عملیات محاسباتی به طور غیراصولی بیشتر بود. نکته دیگر اینک فرموله کردن موجود مستقیماً "ممکن است برای حل سیستم های حاروی ایزولاتورهای خطی در میدان فرکانس مورد استفاده قرار گیرد که در این صورت محاسبه صریح v_b^t بر حسب v_g و خواص سازه و ایزولاتورها ممکن می گردد.

تعیین ماتریس تبدیل h

در معادله (۹) ماتریس تبدیل h معرفی گردید، اکنون لازم است که اجزاء این ماتریس را از روی تعادل استاتیکی سیستم سازه اصلی تحت بارهای اینرسی F_T مشخص کنیم. به سادگی با استفاده از اصل کار مجازی می توان ثابت نمود که ماتریس h در حقیقت مساوی ترانسپوز ماتریس نفوذ \underline{I} است. بنا بر این لزومی به ارزیابی جداگانه ماتریس h نبوده

و این ماتریس را می توان از روی معادله:

$$\underline{h} = \underline{x}^T \quad (17)$$

انتخاب نمود. (برای اثبات معادله (۱۷) به ضمیمه الف رجوع شود).

حل معادلات تعادل

در حالتی که رفتار ایزولاتورهای ارتعاشی غیرخطی باشد، حل صریح معادلات تعادلی که به طور کلاسیک بدست آمده باشند متضمن استفاده از یک روش کلی نموی بوده که به علت نیاز به اصلاح ماتریس سختی و معکوس نمودن ماتریس سختی معادل در هر قدم حل نسبتاً " پرهزینه" و غیراقتصادی خواهد بود. البته در راه حلی که مورد مطالعه است ممکن است دو دستگاه معادلات تعادل (۶) و (۱۵) را به صورت توأم زیرنوشت و آن را حل کرد:

(الف-۱۸)

$$\begin{bmatrix} \underline{m} & \underline{a} \\ \underline{b} & \underline{M}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{v}} \\ \underline{\ddot{v}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{c}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{v}} \\ \underline{\dot{v}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{K} \\ \underline{0} & \underline{K}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{v}_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{M}_b \end{bmatrix} \underline{x} \underline{\ddot{v}}_g$$

یا

$$\underline{M}\underline{\ddot{U}} + \underline{C}\underline{\dot{U}} + \underline{K}\underline{U} = \underline{R} \quad (\text{ب-۱۸})$$

که در آن:

$$\underline{a} = (\underline{m} \underline{x} + \underline{m}_b)$$

$$\underline{b} = \underline{x}^T \underline{m}$$

$$\underline{M}_b = \underline{x}^T \underline{m} \underline{x} + \underline{m}_b \quad (19)$$

واضح است که ماتریس‌های ضرایب معادله (۱۸) همان ماتریس‌هایی نیستند که از حل مستقیم مسأله حاصل شوند. خوشبختانه فرموله کردن مسأله به نحوی که ارائه شد به صورتی است که در ماتریس سختی کل هیچ وابستگی بین قسمت خطی و غیرخطی وجود نداشته و اصلاح \tilde{K}_b در هر قدم حل به سادگی انجام پذیر است، چنین مزیتی در فرموله کردن مستقیم مسأله مشاهده نمی‌شود. این مزیت باعث کاهش هزینه محاسباتی معادله $\tilde{K} \Delta U = \Delta \tilde{R}$ که معادله نموی مربوطه معادله (۱۸) است، می‌شود. زیرا، به عنوان مثال، اگر روش حذف گوسی برای حل این معادله بکار رود کافی است عملیات مثلثی کردن \tilde{K} یکبار برای ماتریس کامل \tilde{K} صورت گیرد و در قدم‌های بعدی حل در شرایطی که \tilde{K}_b عوض می‌شود عملیات حذف گوسی فقط روی بلوک گوشه پایین سمت راست \tilde{K} که دربرگیرنده \tilde{K}_b است انجام گیرد. این کار به سهولت به روش حل فعال ستونی [۶] میسر است.

اگرچه حل مستقیم معادله (۱۸) امکان پذیر بوده و این حل دارای مزیتی است که به آن اشاره نمودیم، لیکن منظور از راه‌حلی که در جستجوی آن هستیم فراتر از این می‌باشد. در روش حلی که توضیح داده خواهد شد با عنایت به این مطلب که با تعبیه ایزولاتورهای انعطاف پذیر غیرخطی در پایه‌های یک سازه شدت مشا رکت مودهای بالاتر ارتعاشی در بردار عکس‌العمل جابجایی کاهش می‌یابد، با استفاده از شکل مودهای ارتعاشی سازه اصلی به عنوان مختصات ریتز برای کاربرد در روش شناخته شده ریتز سعی در کاهش ابعاد ماتریس‌های خواص سازه و همچنین قطری کردن قسمت مهم آن می‌شود. مزیت اخیر در حقیقت نتیجه مستقیم کاربرد مختصات ریتز بشمار می‌آید.

برای حل معادلات (۶) و (۱۶) ابتدا بردار جابجایی y را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$1. \text{ Active Column Solution} \quad 2. \text{ Ritz coordinates}$$

$$\underline{v} = \underline{\Psi} \underline{Y} \quad (20)$$

که $\underline{\Psi}$ ماتریس حاوی اولین شکل مود ارتعاشی مسأله مشخصه $\underline{v} = 0$ و $(\underline{k} - m\omega^2)$ و \underline{Y} مختصات ریتزمی باشد. با جانشین کردن معادله (۲۰) در معادلات (۶) و (۱۶) و پیش ضرب معادله (۶) در $\underline{\Psi}^T$ خواهیم داشت:

$$\underline{M}^* \underline{\ddot{Y}} + \underline{C}^* \underline{\dot{Y}} + \underline{K}^* \underline{Y} = -\underline{\Psi}^T \underline{a} (\underline{\ddot{v}}_b + \underline{r}_b \underline{\ddot{v}}_g) \quad (\text{الف-21})$$

$$\underline{M} \underline{\ddot{v}}_b + \underline{c} \underline{\dot{v}}_b + \underline{k} \underline{v}_b = -\underline{b} \underline{\Psi} \underline{\ddot{Y}} - \underline{M}_b \underline{r}_b \underline{\ddot{v}}_g \quad (\text{ب-21})$$

که در آن

$$\underline{M}^* = \underline{\Psi}^T \underline{m} \underline{\Psi}$$

$$\underline{C}^* = \underline{\Psi}^T \underline{c} \underline{\Psi} \quad (22)$$

$$\underline{K}^* = \underline{\Psi}^T \underline{k} \underline{\Psi}$$

به طوری که \underline{M}^* ، \underline{C}^* و \underline{K}^* به ترتیب ماتریس جرم تعمیم یافته، ماتریس استهلاک تعمیم یافته و ماتریس سختی تعمیم یافته سازه اصلی هستند. دو ماتریس \underline{M}^* و \underline{K}^* قطری بوده و برای قطری بودن \underline{C}^* فرض لازم برای محدود نمودن ماتریس \underline{C} را برقرار می کنیم. ابعاد این ماتریس ها $J \times J$ بوده که عدد J بسته به نوع مسأله ممکن است در مقایسه با ابعاد ماتریس های خواص سازه بسیار کوچک باشد. در سیستم ایزوله شده با نسبت نرمی زیاد مقدار J ممکن است در حد چند عدد اولیه محدود شود.

هرگاه معادلات (۲۱) به صورت نموی نوشته شوند خواهیم داشت:

$$\underline{M}^* \Delta \underline{\ddot{Y}} + \underline{C}^* \Delta \underline{\dot{Y}} + \underline{K}^* \Delta \underline{Y} = -\underline{\Psi}^T \underline{a} (\Delta \underline{\ddot{v}}_b + \underline{r}_b \Delta \underline{\ddot{v}}_g) \quad (\text{الف-23})$$

$$\underline{M}_b \Delta \ddot{\underline{v}}_b + \underline{c}_b \Delta \dot{\underline{v}}_b + \underline{k}_b \Delta \underline{v}_b = -\underline{b} \underline{\Psi} \Delta \ddot{\underline{y}} - \underline{M}_b \underline{r}_b \Delta \ddot{\underline{v}}_g \quad (\text{ب- } 23)$$

یا

$$\underline{\hat{M}} \Delta \ddot{\underline{y}} = \Delta \underline{R}^\circ - \underline{\Psi}^T (\underline{a} \Delta \ddot{\underline{v}}_b + \underline{r}_b \Delta \ddot{\underline{v}}_g) \quad (\text{الف- } 24)$$

$$\underline{\hat{M}}_b \Delta \ddot{\underline{v}}_b = \Delta \underline{R}_b^\circ - \underline{b} \underline{\Psi} \Delta \ddot{\underline{y}} - \underline{M}_b \underline{r}_b \Delta \ddot{\underline{v}}_g \quad (\text{ب- } 24)$$

به طوری که $\underline{\hat{M}}$ ، $\Delta \underline{R}_b^\circ$ و $\Delta \underline{R}^\circ$ با انتخاب الگوی محاسباتی به سادگی تعیین می شوند. ارزیابی این کمیات برای الگوی شتاب خطی و شتاب متوسط ثابت در ضمیمه ب ارائه شده است. اندیس فوقانی "o" در بردارهای بکاررفته نشان می دهد این بردارها در شرایط پایانی قدم قبلی محاسباتی ارزیابی شده اند. از معادله (الف- 24) نتیجه می گیریم:

$$\Delta \ddot{\underline{y}} = \underline{\hat{M}}^{-1} [\Delta \underline{R}^\circ - \underline{\Psi}^T (\underline{a} \Delta \ddot{\underline{v}}_b + \underline{r}_b \Delta \ddot{\underline{v}}_g)] \quad (25)$$

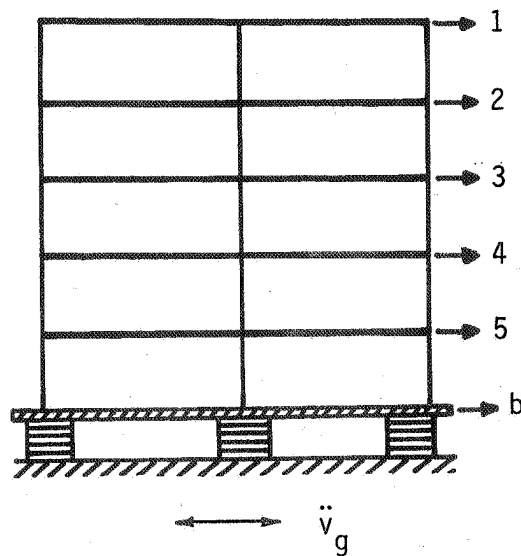
که اگر در معادله (ب- 24) بکار ببریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & (\underline{\hat{M}}_b - \underline{b} \underline{\Psi} \underline{\hat{M}}^{-1} \underline{\Psi}^T \underline{a}) \Delta \ddot{\underline{v}}_b \\ & = \Delta \underline{R}_b^\circ - \underline{b} \underline{\Psi} \underline{\hat{M}}^{-1} \Delta \underline{R}^\circ + (\underline{b} \underline{\Psi} \underline{\hat{M}}^{-1} \underline{\Psi}^T \underline{a} - \underline{M}_b) \underline{r}_b \Delta \ddot{\underline{v}}_g \end{aligned} \quad (26)$$

پس حل معادله (26) برای $\Delta \ddot{\underline{v}}_b$ و جانشین کردن جواب بدست آمده در معادله (25) بردار $\Delta \ddot{\underline{y}}$ تعیین می گردد. در این معادلات تنها کمیات که به \underline{k}_b وابسته بوده و ممکن است در طول محاسبات احتیاج به ترمیم داشته باشند ماتریس های $\underline{\hat{M}}_b$ و بردار $\Delta \underline{R}_b^\circ$ هستند.

مثال

برای نشان دادن کاربرد روش پیشنهادی و مقایسه این روش با روش حل مستقیم مسأله، قاب ۵ طبقه برش شکل ۳ را انتخاب می‌کنیم. این قاب بر روی یک طبقه پایه با ایزولاتورهای ارتعاشی با خواص مشخص اختیاری نصب گردیده است. به عنوان تابع تحریک سیستم، سیگنال شتاب زلزله ال سنترومؤلفه شرقی - غربی بکار می‌رود. این مثال صرفاً "به دلیل ساده‌کردن برنامه‌ها کامپیوتری لازم مورد بررسی قرار می‌گیرد و لا نشان دهنده همه جنبه‌های کارآئی روش پیشنهادی نیست. از طرفی تعداد طبقات سازه نسبتاً "زیاد" اختیار شده است تا تعداد مودهای ارتعاشی قابل توجه باشد. مشخصات اولیه این سازه در کنار آن نوشته شده است.



شکل ۳: یک سازه برشی بر روی ایزولاتورهای غیرخطی

$$\underline{k} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_b = k < 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 >^T$$

$$\underline{k}_b = k_b \quad \underline{k}_g = -k_b$$

$$\underline{m} = m\underline{I} \quad \underline{m}_b = 0 \quad \underline{\tilde{m}}_b = m_b$$

$$\underline{a} = m\underline{I} \quad \underline{b} = \underline{1}^T \underline{m} = m\underline{1}^T = \underline{a}^T$$

$$M_b = 5m + m_b$$

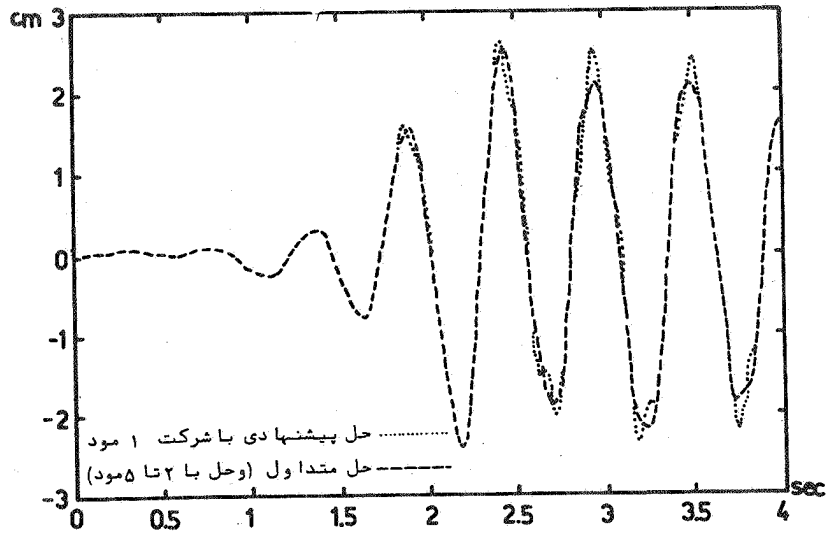
این مثال را یک بار با مقدار عددی $k=k_b=40 \times 10^3 \text{ kg/cm}$ تحت اثر ۱۵ ثانیه اول شتاب شرقی - غربی ال سنتر و حل نمودیم. انتخاب مقدار عددی فوق در حقیقت نمایانگر این است که پایه سازه دارای خواص مشابه با خواص بقیه طبقات می باشد. حل مستقیم تغییر مکان طبقه بالا و حل به روش پیشنهادی با کاربرد موداول ارتعاشی در شکل ۴ نشان داده شده است. به طوری که مشهود است دو جواب نسبتاً "بریکدیگر منطبق هستند بدون اینکه اختلاف قابل توجهی مشاهده شود. هنگامی که تعداد مودهای ارتعاشی افزایش یا بد اختلاف دو منحنی غیر قابل تشخیص می شود.

جدول (۱) تغییر مکان درجه آزادی را نشان می دهد .

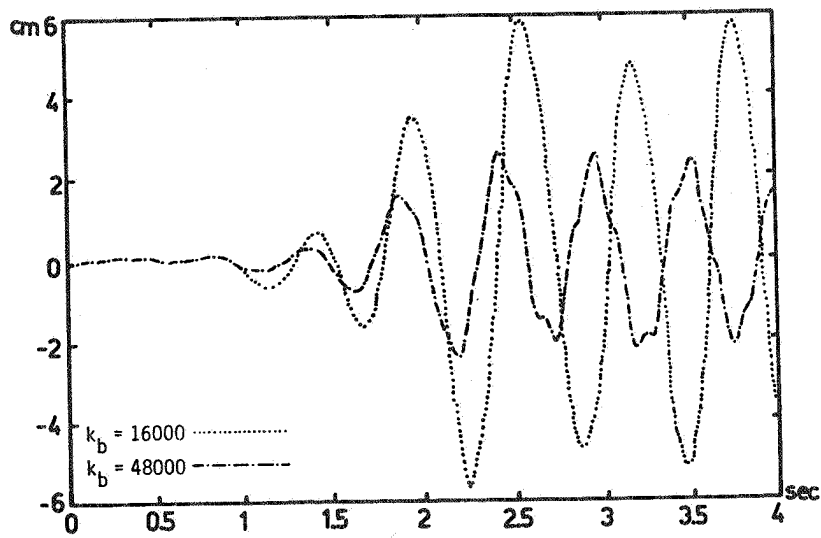
جدول ۱- مقایسه تغییر مکان درجه آزادی به روش مستقیم و روش جدید با تعداد دموردهای مختلف

نوع حل	حل مستقیم	حل جدید با یک مود	حل با دو مود	حل با سه مود	حل با چهار مود	حل با پنج مود
تغییر مکان ۵cm	۱۱/۹۵۱۴	۱۱/۹۹۴۵	۱۲/۱۳۹۶	۱۱/۹۲۳۵	۱۱/۹۲۷	۱۱/۹۵۱۴

در قسمت دوم حل برای m و m_b همان مقادیر قبلی ۱۶ را انتخاب کرده و فرض کردیم $k = 48000$ و $k_b = \frac{1}{3} k$ باشد. مجدداً " حل مساله را برای ۱۵ ثانیه اول شتاب شرقی - غربی زلزله آل سنتر و بدست آوردیم. جوابها برای تغییر مکان پایه و تغییر مکان درجه آزادی به ترتیب در شکل های ۵ و ۶ با خطوط منقطع رسم شده است. برای مقایسه، همین تغییر مکانها در شرایط $k_b = k$ نیز بر روی همین شکلها ترسیم گردیده اند. البته هر دو این حلها به روش جدید با استفاده از یک مود بدست آمده اند و مقایسه آنها با حل مستقیم مساله نشان دهنده اختلاف بسیار ناچیز در حدهما را اختلاف قسمت اول حل است. به طوری که از روی این شکلها واضح است با کاهش سختی k_b در مقایسه با ضریب سختی k دامنه تغییر مکان پایه افزایش و دامنه تغییر مکان طبقه آخر (وسایر طبقات) کاهش می یابد: در هر دو حالت چون سیستم انعطاف پذیرتر می شود پریود ارتعاشی افزایش پیدا می کند. مقادیر زیر برای تغییر مکان ماگزیم پایه و طبقه ۵ و مقایسه آن با حالت $k = k_b$ در جدول (۲) نشان داده شده است.



شکل ۴: مقایسه تغییر مکان پایه به روش حل مستقیم و روش پیشنهادی با استفاده از یک مود ارتعاشی در شرایط $k = k_b = 40000$ و تابع تحریک موج لفه شرقی - غربی زلزله ال سنترو



شکل ۵: مقایسه تغییر مکان پایه در دو حالت $k_b = 16000$ و $k_b = 48000$ به روش پیشنهادی با استفاده از یک مود ارتعاشی

جدول ۱- تغییر مکان پایه و تغییر مکان با م
برای دو مقدار متفاوت k_b

تغییر مکان پایه	تغییر مکان با م	کاهش سختی
۳/۱۰۲۴	۸/۷۲۸۷	$K_b = K = 48000$
۷/۳۶۵۵	۷/۳۶۸۱	$K_b = \frac{1}{3} K$

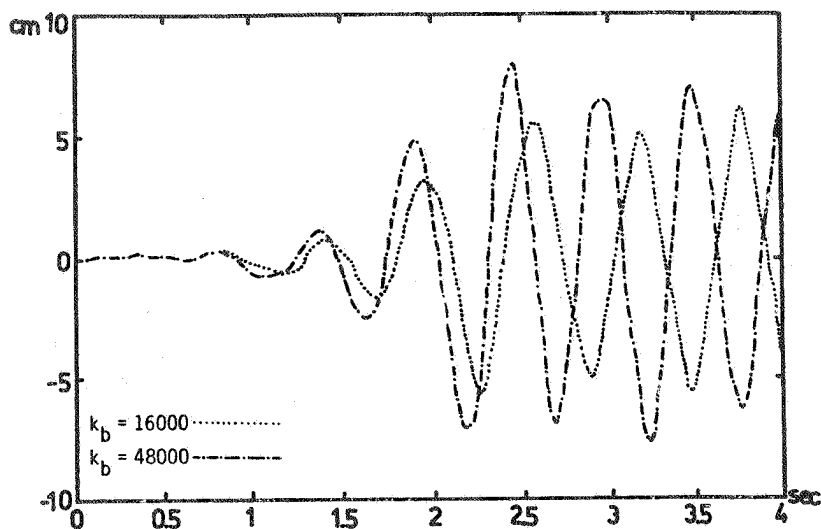
و با لایحه حل مسأله برای رفتار را لاستیک - پلاستیک پایه ها انجام شد. سختی اولیه پایه ها $k_b = 40000$ و تغییر مکان پلاستیک آن $v_y = 1.6 \text{ cm}$ و سختی بعد از پلاستیک $k_b = 1000$ انتخاب گردید. شکل ۷ منحنی تغییر مکان طبقه فوقانی سازه را در دو حالت ۱ مودی و ۵ مودی نشان می دهد. حل مستقیم بر حل ۵ مودی منطبق است.

نتیجه گیری

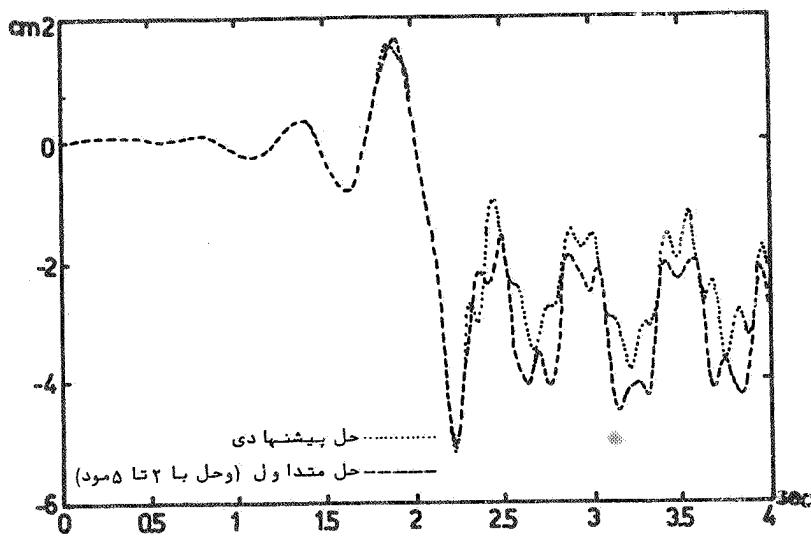
باروش حل دینا میکی ارائه شده برای سازه های خطی که نحوه اتصال آنها به زمین یا تکیه گاهها از طریق اعضا رابط غیرخطی (ایزولاتورها) صورت گرفته شده باشد، می توان از مزیت روش رویهم گذاری مودها بهره برد. روش ارائه شده با موفقیت در مورد یک سازه ساختمانی تحت اثر ۱۵ ثانیه اول مؤلفه شرقی - غربی زلزله ال سنتر وست گردید و جوابها کاملاً قابل مقایسه با جوابهای حل مستقیم مسأله بودند. در این روش پیشنهادی آنالیز دینا میکی صرفه جوئی در زمان محاسبات بسیار سیستمهای بزرگ تر چشم گیرتر است.

قدردانی

از زحمات آقای بیژن برومند دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی اصفهان در انجام محاسبات کامپیوتری قدردانی می شود.



شکل ۶: مقایسه تغییر مکان با لادردو حالت $k_b = 16000$ و $k_b = 48000$ به روش بیشنهادی با استفاده از یک مود ارتعاشی



شکل ۷: مقایسه تغییر مکان الاستیک - پلاستیک طبقه با لایه روش حل مستقیم و حل جدید با استفاده از یک مود ارتعاشی با $k_b = 40000$ و مدول کا رسختی $v_y = 1.6 \times 1000$

ضمیمه الف

برای اثبات معادله (۱۷) پایه i ام را در نظر گرفته و جایجایی واحدی در راستاهای درجات آزادی آن اعمال می‌کنیم. اثرات این جایجاییها بر روی درجات آزادی سازه اصلی در قالب ستون های ماتریس \underline{x} که متحد با آن درجات آزادی هستند ظاهر می‌گردد که با \underline{x}_i نشان می‌دهیم. حال اگر نیروهای اینرسی $\underline{m} \underline{v}^t$ را در روی درجات آزادی سازه اصلی در نظر گرفته و بردار معادل استاتیکی این نیروهای اینرسی را در درجات آزادی مورد نظر پایه‌ها با \underline{q}_i مشخص کنیم، برای محاسبه \underline{q}_i بر طبق اصل کار مجازی می‌توان نوشت:

$$\underline{I}^T \cdot \underline{q}_i = \underline{x}_i^T \cdot \underline{F}_I \quad (۱- الف)$$

که چون این معادله برای تحریک هر یک از درجات آزادی پایه — صورت جداگانه صادق است خواهیم داشت:

$$\underline{q}_i = \underline{x}_i^T \cdot \underline{F}_I \quad (۲- الف)$$

از مقایسه معادله (۲- الف) و معادله (۱۰) نتیجه زیر حاصل شود:

$$\underline{h}_i = \underline{x}_i^T \quad (۳- الف)$$

که اگرچنین نتیجه‌ای را توأماً ما " برای تمام پایه‌ها استخراج کنیم همان معادله (۱۷) بدست خواهد آمد.

ضمیمه ب

محاسبه ماتریس \tilde{M} و بردارهای ΔR_b° و ΔR° رابطه بین ΔY ، $\Delta \dot{Y}$ ، و $\Delta \ddot{Y}$ در یک الگوی شتاب خطی چنین است [۵]

$$\Delta \dot{Y}_{(t)} = \frac{3}{\Delta t} \Delta Y_{(t)} - \Delta \dot{Y}_{(t)} - \frac{\Delta t}{2} \ddot{Y}_{(t)} \quad (ب-۱)$$

$$\Delta \ddot{Y}_{(t)} = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta Y_{(t)} - \frac{6}{\Delta t} \dot{Y}_{(t)} - 3\ddot{Y}_{(t)} \quad (ب-۲)$$

یا

$$\Delta Y_{(t)} = \dot{Y}_{(t)} \Delta t + \ddot{Y}_{(t)} \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{Y}_{(t)} \frac{\Delta t^2}{2} \quad (ب-۳)$$

$$\Delta \dot{Y}_{(t)} = \ddot{Y}_{(t)} \Delta t + \Delta \ddot{Y}_{(t)} \frac{\Delta t}{2} \quad (ب-۴)$$

با جانشین کردن معادلات (۳- الف) و (۴- الف) در معادله (الف-۲۳) خواهیم داشت :

$$\left(\underline{M}^* + \underline{C}^* \frac{\Delta t}{2} + \underline{K}^* \frac{\Delta t^2}{6} \right) \Delta Y = - \left(\underline{C}^* \Delta t + \underline{K}^* \frac{\Delta t^2}{2} \right) \ddot{Y}_{(t)} - \underline{K}^* \Delta t \dot{Y}_{(t)}$$

$$-\underline{\Psi}^T \underline{a} \left(\Delta \underline{\ddot{v}}_b + \underline{r}_b \Delta \underline{\ddot{v}}_g \right) \quad (ب-۵)$$

از مقایسه معادله (۵ - الف) با معادله (الف - ۲۴) خواهیم داشت :

$$\tilde{M} = \underline{M} + \underline{C} \frac{\Delta t^2}{2} + \underline{K} \frac{\Delta t^2}{6} \quad (۶-ب)$$

$$\Delta \underline{R}^{\circ} = - \underline{C} \Delta t \ddot{\underline{Y}} - \underline{K} (\Delta t \dot{\underline{Y}}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\underline{Y}}(t)) \quad (۷-ب)$$

برای تعیین \tilde{M}_b و ΔR_b° در معادله (ب - ۲۴) مشابه با فوق عمل می‌کنیم

$$\tilde{M}_b = \underline{M}_b + \underline{C}_b \frac{\Delta t}{2} + \underline{K}_b \frac{\Delta t^2}{6} \quad (۸-ب)$$

$$\Delta \underline{R}_b^{\circ} = - (\underline{C}_b \Delta t + \underline{K}_b \frac{\Delta t^2}{2}) \ddot{\underline{v}}_b - \underline{K}_b \Delta t \dot{\underline{v}}_b \quad (۹-ب)$$

لیست علائم

ما تریس سختی سازه اصلی (مربوط به درجات آزادی فعال سیستم)	\underline{K}
ما تریس سختی نظیر درجات آزادی فعال سازه وقتی که درجات آزادی پایه‌ها جابجا شوند.	\underline{K}_b^-
ما تریس سختی نظیر درجات آزادی پایه‌ها بر اثر تحریک درجات آزادی پایه	$\tilde{\underline{K}}_b$
ما تریس سختی نظیر درجات آزادی پایه وقتی که درجات آزادی زمین جابجا شوند	\underline{K}_g^-
ما تریس‌های استهلاک سازه اصلی و سیستم پایه‌ها	$\underline{C}, \tilde{\underline{C}}_b$
ما تریس‌های استهلاک تعریف شده در همان شرایط تعریف \underline{K}_g و \underline{K}_b	$\underline{C}_b, \underline{C}_g$
ما تریس‌های جرم سازه اصلی و سیستم پایه‌ها	$\underline{m}, \tilde{\underline{m}}_b$
ما تریس‌های جرم تعریف شده در همان شرایط تعریف \underline{K}_g و \underline{K}_b	$\underline{m}_b, \underline{m}_g$
ما تریس‌های نفوذ استاتیکی درجات آزادی پایه روی سازه و درجات آزادی زمین روی پایه	$\underline{x}, \underline{x}_b$
ما تریس تبدیل نیروهای اینرسی سازه اصلی به نیروهای اینرسی معادل در روی پایه‌ها و همین‌ها برای پایه	$\underline{h}, \underline{h}_i$
بردار نیروهای اینرسی معادل روی پایه‌ها و بردار نیروی اینرسی معادل روی پایه \underline{z}_a	$\underline{Q}, \underline{Q}_i$

بردار نیروی اینرسی سازه اصلی	$\frac{F}{I}$
بردارهای جایجایی مطلق و جایجایی نسبی سازه اصلی	$\underline{v}^t, \underline{v}$
بردارهای جایجایی مطلق و جایجایی نسبی پایه‌ها	$\underline{v}_b^t, \underline{v}_b$
بردار رشتاب‌های زمین	\underline{v}_g
بردارهای جایجایی شبه‌استاتیکی سازه اصلی و سیستم پایه‌ها	v_s, v_{bs}

مراجع

1. Kelly, J.M., " Aseismic Base Isolation: Review and Bibliography", *Soil Dyn. & Earth. Eng.*, V.5, No.3, 1986.
2. Skinner, R.I., Kelly, J.M., & Heine, A.J., "Hysteretic Dampers for Earthquake Resistant Structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, V.3, 1975.
3. Kelly, J.M., Skinner, R.I., & Heine, A.J., "Mechanisms of Energy Absorbtion in Special Devices for Use in Earthquake Resistant Structures", *Bulletin of N.Z. Society for Earthquake Engineering*, V.5, No.3, Sep. 1972.
4. Clough, R.W., & Wilson, E.L., " Dynamic Analysis of Large Structural Systems with Local Nonlinearities", *Comp. Methods in Applied Mech. and Eng.*, 17/18, pp. 107-129, 1979.
5. Bathe K.J., & Sheryl Gracewski, " On Nonlinear Dynamic Analysis Using Substructuring and Mode Superposition ", *Computers & Structures*, V.13, pp. 699-707, 1981.

6. Clough, R.W., & Penzien, J., Dynamics of Structures, McGraw-Hill/New York,
7. Bathe, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.