

# حل عددی جابه‌جایی طبیعی در یک کانال عمودی

علی اصغر رستمی\* و محمدرضا خسروی\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۴/۱۲/۲۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۵/۴/۳)

چکیده - کانالهای عمودی در صنایع انرژی خورشیدی به عنوان جمع‌کننده انرژی خورشیدی و به طور وسیع در کامپیوترها و ترانزیستورها برای سرمایش قطعات الکترونیکی استفاده می‌شوند. در این کانالها به علت اختلاف دمایی که بین سیال و سطح وجود دارد جابه‌جایی طبیعی در کانال ایجاد می‌شود. بررسی جریان در این کانالها از نظر حرارتی به یک جریان دوبعدی جابه‌جایی طبیعی بین دو صفحه موازی تبدیل می‌شود. در این مقاله معادله‌های بقا برای جریان آرام دوبعدی دائم بین دو صفحه موازی با شرط مرزی دمایی سطح و شار حرارتی یکنواخت سطح حل شده است. تأثیر اعداد پرانتل و گراشف و نسبت طول به عرض مجرا روی دبی جریان و عدد نوسلت بررسی شد. نتایج حاصل برای عدد نوسلت موضعی دهانه خروجی کانال با نتایج تجربی مقایسه شده و دقت آن قابل قبول به نظر می‌رسد.

## Numerical Solution of Natural Convection in a Vertical Channel.

All A. Rostami, and M. R. Khosravi

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**ABSTRACT-** *Natural Convection between vertical parallel plates occurs frequently in applications such as solar collectors and cooling of electronic instruments. The problem is a two dimensional developing buoyant flow. In this work, the two dimensional conservation equations are solved numerically for constant wall temperature and constant wall heat flux. The results for the local Nusselt number at the duct exit are compared with the experimental data and the agreement is reasonable.*

۱- مقدمه

این کانالها در صنایع انرژی خورشیدی کاربرد دارند. در این صنایع از این صفحات به عنوان جمع‌کننده انرژی خورشیدی استفاده می‌شود. همچنین برای خنک کردن سیستمهای الکترونیکی مدرن (ترانزیستورها، کامپیوترها، ترانسفورماتورها) از این نوع کانال استفاده شود. بدین منظور قطعات الکترونیکی روی ورقه‌های مخصوصی نصب می‌شوند. سپس این صفحات در کنار هم و به صورت

جریان طبیعی و اجباری و توأم در بین صفحات موازی به علت کاربردهایی که در صنعت دارند، به طور وسیع مورد مطالعه قرار می‌گیرند. به عنوان نمونه به چند کاربرد این نوع کانال اشاره می‌شود.

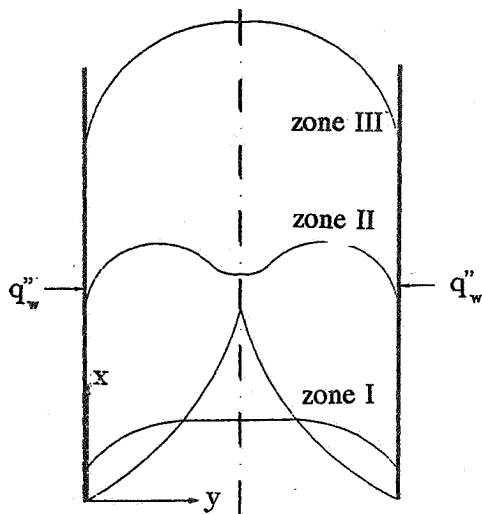
\* دانشیار \*\* مربی

| فهرست علائم                          |  |
|--------------------------------------|--|
| عرض کانال                            | $a$  |
| نصف عرض کانال                        | $b$  |
| ضریب اصطکاک                          | $C_f = \frac{\tau_w}{1/2 \rho u^2}$                          |
| توابع جریان بی بعد                   | $f, F$   |
| عدد گراشف                            | $Gr = \frac{g \beta b^3 (T_w - T_a)}{\nu^2}$                 |
| عدد گراشف                            | $Gr = \frac{g \beta q'' b^3}{k \nu^2}$                       |
| عدد گراشف (تغییر یافته)              | $Gr^* = \frac{g \beta a^3 (T_w - T_a)}{L \nu^2}$             |
| ضریب هدایت حرارتی                    | $k$  |
| طول کانال                            | $L$  |
| عدد نوسلت موضعی                      | $Nu_x = \frac{q_w(x)}{T_w - T_a} \left( \frac{x}{k} \right)$ |
| عدد نوسلت موضعی در دهانه خروجی کانال | $Nu(L) = \frac{hL}{k}$                                       |
| فشار                                 | $P$  |
| فشار بی بعد                          | $P^*$  |
| فشار بی بعد                          | $P = Gr^{1/2} P^*$   |
| فشار حرکت                            | $P_m$  |
| عدد پراشل                            | $Pr$   |
| شار حرارتی از سطح به سیال            | $q''$  |
| عدد رایلی                            | $Ra = Pr \frac{b}{L} Gr$                                     |
| عدد رایلی                            | $Ra^* = Pr Gr^*$   |
| عدد رینولدز                          | $Re = \frac{u b}{\nu}$                                       |
| دما                                  | $T$  |
| سرعت در جهت طول                      | $u$  |
| سرعت جابه جایی طبیعی                 | $u_g = \sqrt{g \beta x (T_w - T_a)}$                         |
| سرعت مرجع                            | $u_{ref} = \nu/b$  |
| سرعت مرجع                            | $U_{ref} = \nu/b Gr^{1/2}$                                   |
| دمای یکنواخت سطح                     | $UWT$  |
| شار حرارتی یکنواخت سطح               | $UWH$  |
| سرعت در جهت عرض                      | $v$  |
| مختصات در جهت طول                    | $x$  |
| نسبت طول به عرض کانال                | $X = x/b$  |
| مختصات در جهت عرض                    | $y$  |
| متغیر بی بعد در جهت عرض (معادله ۱۳)  | $Y$  |
| فهرست علائم یونانی                   |  |
| ضریب انبساط حجمی                     | $\beta$  |
| ضخامت لایه مرزی گرمایی               | $\delta$   |
| متغیر بی بعد در جهت طول              | $\xi$  |
| متغیر بی بعد در جهت عرض              | $\eta$   |
| ضخامت لایه مرزی بی بعد               | $\eta_e$   |
| تعریف شده در معادله (۱۱)             | $\eta_{sp}$  |
| دمای بی بعد                          | $\theta$   |
| ویسکوزیته سینماتیکی                  | $\nu$  |
| دانسیته                              | $\rho$   |
| تنش برشی روی سطح                     | $\tau_w$   |
| زیر نویسها                           |  |
| صفحه تقارن                           | $c$  |
| خارج لایه مرزی                       | $e$  |
| ورودی                                | $0$  |
| سطح                                  | $w$  |

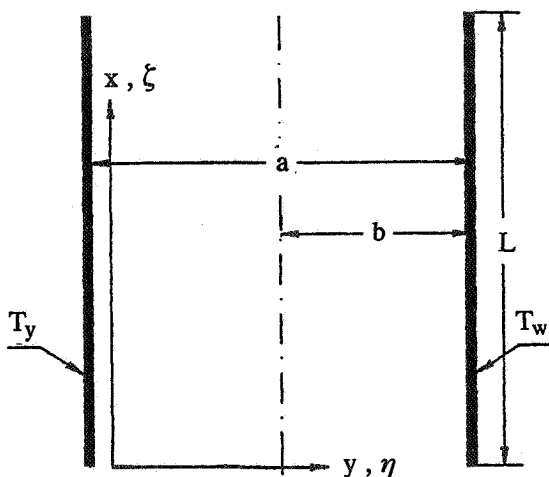
گیرگ [۴] مورد مطالعه قرار گرفت. در این تحقیق با استفاده از روش حل تشابهی، جریان جابه جایی طبیعی روی یک صفحه حل شد و رابطه‌ای برای تغییرات دمای صفحه براساس عدد رایلی پیشنهاد شد. سپس تحقیقی توسط بودیا و استیرل [۵] روی جریان جابه جایی طبیعی در بین دو صفحه موازی با شرط مرزی دمای یکنواخت سطح با استفاده از روشهای عددی انجام شد. در این مطالعه معادله‌های لایه مرزی، با فرض توزیع سرعت و دمای ورودی به دهانه کانال یکنواخت حل شد. نتایج حاصل از این روش عددی با نتایج تجربی الن باس مطابقت خوبی داشت. همین مسئله با شرط مرزی شار حرارتی یکنواخت برای سطح توسط سوپل، لاندیس و مولر [۶] با استفاده از روش عددی حل شد. کیتل بورو [۷] و ناکامورا [۸] معادله‌های اساسی حاکم بر جریان راکه به شکل بیضوی است، بدون تقریب لایه مرزی حل کرده اند. در این روشهای عددی شرایط ورودی جریان از نظر فیزیکی کاملاً توسعه یافته بایک انبساط ناگهانی بزرگ در نظر گرفته شده است و تنها در چند مورد نتایج

عمودی در قفسه‌هایی ردیف می‌شوند. در نهایت برای خنک کردن قطعات الکترونیکی از بین این صفحات سیال عبور می‌دهند. بسته به نوع و حساسیت این قطعات، از روشهای انتقال حرارت جابه جایی اجباری، طبیعی و یا توأم استفاده می‌شود [۱ و ۲].

پژوهشگران بسیاری در زمینه جابه جایی طبیعی در بین صفحات موازی کار کرده و مطالعات وسیعی انجام داده‌اند. تاریخچه مدل کردن جابه جایی طبیعی در بین دو صفحه موازی به سال ۱۹۴۲ و کار تجربی الن باس [۳] برمی‌گردد. الن باس جریان جابه جایی طبیعی در بین دو صفحه موازی با شرط مرزی دمای یکنواخت برای سطح را مورد بررسی قرارداد و برای فاصله خیلی کوچک بین صفحات موازی مشاهده کرد که عدد نوسلت متناسب با عدد رایلی است. در این تحقیق محدوده وسیعی از اعداد رایلی  $10^5 \leq Ra^* \leq 10^7$  مورد آزمایش قرار گرفت. جریان جابه جایی طبیعی روی یک صفحه با شرط مرزی شار حرارتی یکنواخت برای سطح توسط اسپارو و



الف - توسعه جریان



ب - شرایط مرزی

شکل ۱- ابعاد هندسی و شرایط مرزی

ساده سازیهای فوق و با توجه به شکل ۱، معادله‌های حاکم بر جریان به صورت زیر نوشته می‌شوند.

پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

مومتم در جهت x

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_m}{\partial x} + g\beta (T - T_0) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

این دو تحقیق باهم مطابقت خوبی دارند. رامانانتن [۹] برای حل مشکل شرایط ورودی و خروجی، کانال (با شرط مرزی شارحرارتی یکنواخت برای سطح) را در یک محفظه بسته خیلی بزرگ که دمای سطح محفظه یکنواخت است، قرار داد و میدان جریان را محفظه بسته با کانال در نظر گرفت. علی‌رغم انتخاب میدان محاسباتی خیلی بزرگ، نتایج اثرات سطح محفظه به کلی حذف نشده است و عملاً سیال از طرف سطح محفظه پیشگرم و سپس وارد کانال می‌شود. نایلور [۱۰] برای شرط مرزی ورودی، جریان جفری - هامل را در نظر گرفت. نتایج حل عددی نایلور خیلی نزدیک به نتایج ناکامورا [۴] است. نایلور برای بعضی مقادیر دبی جرمی، در دهانه کانال یک نقطه جدایی پیش بینی کرده است که این نقطه جدایی روی پارامترهای موضعی انتقال حرارت در دهانه ورودی اثر معکوس دارد. در این مقاله، جریان جابه‌جایی طبیعی آرام در بین دو صفحه موازی مورد مطالعه قرار گرفته است. معادله‌های بقاء جریان دائم، آرام و دو بعدی با استفاده از روش عددی (ضمنی) «جعبه‌ای کلر» حل شده است. شرط مرزی روی سطح در دو حالت مختلف دمای یکنواخت و شارحرارتی یکنواخت در نظر گرفته شده است. فشار حرکتی ورودی برابر فشار دینامیکی سیال و فشار خروجی برابر فشار استاتیکی اتمسفر در نظر گرفته شده است. دما و سرعت سیال در مدخل کانال یکنواخت و برابر با  $T_0$  و  $U_0$  در نظر گرفته شده است. مقدار سرعت  $U_0$  به این صورت تعیین می‌شود که فشار در خروجی کانال برابر با فشار محیط باشد.

جریان سیال داخل کانالی را که از سطح به سیال حرارت داده می‌شود در نظر بگیرید. در این حالت که حرکت سیال به علت اختلاف دمای سطح و سیال به وجود آمده است، در داخل کانال جریان جابه‌جایی طبیعی داریم. با وارد شدن سیال به کانال، لایه مرزی از دهانه ورودی شروع به رشد می‌کند و در فاصله‌ای از دهانه، لایه‌های مرزی به هم می‌رسند و به این ترتیب سیال داخل کانال شتاب می‌گیرد و از کانال خارج می‌شود.

فرضهای زیر، برای ساده شدن معادله‌های مومتم و انرژی در نظر گرفته می‌شود. جریان آرام، دوبعدی، دائم، با تقریبه‌های لایه مرزی و همچنین خواص سیال به استثنای دانسیته در جمله‌ای که شامل نیروی غوطه‌وری است (فرض بوزینسک) ثابت فرض می‌شود. با

(۶-ب)  $y=\delta$  ,  $u=ue$  ,  $T=T_e$

معادله مومنتم، انرژی و شرایط مرزی با استفاده از متغیرهای بی بعد و تعریف تابع جریان بی بعد به صورت زیر درمی آیند.

$$\frac{f'''}{Gr^{1/2}} + \frac{\gamma}{4} \zeta^{1/2} f f'' = \zeta^{3/2} \left[ f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{dp_m^*}{d\zeta} - Gr\theta \right] \quad (۷)$$

$$\frac{\theta''}{PrGr^{1/2}} + \frac{\gamma}{4} \zeta^{1/2} f \theta' = \zeta^{3/2} \left[ f' \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \quad (۸)$$

(۹-الف)  $\eta = 0$  ,  $f = f' = 0$  ,  $\theta = 1$

(۹-ب)  $\eta = \eta_e$  ,  $f' = \bar{u}_e$  ,  $\theta = 0$

در معادله های (۸،۷) بالانویس ( ' ) دیفرانسیل نسبت به  $\eta$  است. در جریان داخلی چون جمله گرادیان فشار در معادله مومنتم اضافه می شود، برای حل معادله های (۸،۷) به یک معادله دیگر نیاز داریم. در این مورد از معادله بقای جرم در هر مقطع از کانال استفاده می کنیم.

$$u \cdot b = \int_0^b u \, dy \quad (۱۰)$$

معادله بقای جرم را به صورت بی بعد می نویسیم.

$$\eta_{sp} = \left( \frac{1}{Gr^2 \zeta^2} \right)^{1/2} , \quad f(\zeta, \eta_{sp}) = \frac{Re}{Gr} \zeta^{-2/2} \quad (۱۱)$$

وقتی که ضخامت لایه مرزی به اندازه کافی ضخیم شد (لبه لایه مرزی تقریباً به صفحه تقارن کانال نزدیک شد)، بهتر است از متغیرهای فیزیکی  $(x, y)$  استفاده شود، چون تشابه از بین می رود. بنابراین، متغیرهای تشابهی بی بعد را به متغیرهای فیزیکی تبدیل می کنیم. متغیرهای فیزیکی برای ناحیه در حال توسعه به صورت زیر تعریف می شوند.

$$Y = \left[ \frac{g\beta (T_w - T_e)}{\nu^2 b} \right]^{1/4} y$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial y} = 0 \quad (۳)$$

انرژی:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۴)$$

برای حل میدان جریان با استفاده از روش نیمه تشابهی، میدان جریان به دو ناحیه تقسیم می شود ( مطابق شکل الف ). از دهانه ورودی کانال تا جایی که لبه لایه مرزی به هم می رسند را ناحیه اول و از محلی که لبه لایه مرزی به هم می رسند تا انتهای کانال را ناحیه دوم یا ناحیه در حال توسعه می نامیم. البته لازم به ذکر است که ضخامت لایه مرزی سرعت و گرمایی در جریان طبیعی برای  $Pr \leq 1$  بر هم منطبق هستند و این فرض برای هوا  $Pr = 0.7$  با تقریب خیلی خوبی صادق است، هر چند که برای  $Pr \gg 1$  نسبت  $\sigma/\sigma_0$  خیلی کوچکتر از ۱ خواهد بود [۱۱]. برای محاسبات ناحیه اول که ضخامت لایه مرزی نازک است بهتر است از متغیرهای تشابهی استفاده شود [۱۲]، تا اولاً با یک ضخامت لایه مرزی بی بعد و ثابت محاسبات انجام شود و ثانیاً نقطه منفردی که در دهانه کانال وجود دارد به این ترتیب برداشته شود. در جریان آرام جابه جایی با شرط مرزی دمای ثابت سطح متغیر تشابهی و تابع جریان به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\eta = \left[ \frac{g\beta (T_w - T_e) b^2}{\nu^2 x^2} \right]^{1/2} y$$

$$\psi(x, y) = (g\beta (T_w - T_e) \nu^2 x^2)^{1/2} f(x, \eta) \quad (۵)$$

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_w - T_e} , \quad P_m^* = \frac{P_m b^2}{\rho Gr \nu^2} , \quad \zeta = \frac{x}{b Gr}$$

شرایط مرزی برای ناحیه اول به صورت زیر تعریف می شوند:

(۶-الف)  $y=0$  ,  $u=v=0$  ,  $T=T_w$

$$\eta_{sp} = \left(\frac{1}{Gr^2 \zeta^2}\right)^{1/2}, \quad f(\zeta, \eta_{sp}) = \frac{Re}{Gr \zeta^{2/3}} \quad (ب-۱۹)$$

برای ناحیه در حال توسعه، معادله‌های بی بعدمتمم وانرژی و شرایط مرزی بی بعد به صورت زیر درمی آیند.

$$Y = \left(\frac{g\beta q''}{k\nu^2}\right)^{1/2} y,$$

$$\psi(x,y) = \left(\frac{g\beta \nu^2 q'' b^2}{k}\right)^{1/2} F(\zeta, Y)$$

$$\varphi_f = -(1/Gr)^{1/2} \quad (۲۰)$$

$$GrF'' = F' \frac{\partial F'}{\partial \zeta} - F'' \frac{\partial F}{\partial \zeta} - Gr\varphi_f \theta + \frac{dp_m^*}{d\zeta} \quad (۲۱)$$

$$\frac{Gr}{Pr} \theta'' = F' \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \theta' \frac{\partial F}{\partial \zeta} \quad (۲۲)$$

$$Y = 0, \quad F = F' = 0, \quad \theta' = 1$$

$$Y_c = Gr^{1/2}, \quad F'' = 0, \quad \theta' = 0 \quad (الف-۲۳)$$

$$Y_c = Gr^{1/2}, \quad F(\zeta, Y_c) = \frac{Re}{Gr^{1/2}} \quad (ب-۲۳)$$

## ۲- روش حل عددی معادله‌های دیفرانسیل

در جریانهای داخلی علاوه بر سرعت و دما، گرادیان فشار نیز در معادله مومتمم ظاهر می شود که برای حل میدان جریان و دما، نیاز به دانستن توزیع فشار است. بنابراین، برای حل معادله‌های حاکم بر جریان با استفاده از روش تکرار، مقدار گرادیان فشار در هر مقطع را به دست می آوریم و سپس توزیع سرعت و دما را به کمک این توزیع فشار می یابیم. برای به دست آوردن گرادیان فشار از روش تکرار، دو روش مختلف وجود دارد که یکی به روش مقادیر ویژه غیرخطی و دیگری به روش تابع مسجول معروف است [۱۳]. برای شرایطی که تنش برشی روی سطح مثبت باشد یعنی جدایی جریان وجود نداشته باشد از هر دو روش می توان استفاده کرد، ولی هنگامی که جریان همراه با جدایی باشد فقط روش تابع مسجول قابل استفاده است. در این مقاله از روش مقادیر ویژه غیرخطی برای به دست آوردن گرادیان فشار

$$\psi(x,y) = (g\beta (T_w - T_\infty) \nu^2 b^2)^{1/2} F(\zeta, Y) \quad (۱۲)$$

معادله‌های (۲) و (۴) و شرایط مرزی و بقای جرم به شکل زیر در می آیند.

$$F' \frac{\partial F'}{\partial \zeta} - F'' \frac{\partial F'}{\partial \zeta} = Gr(F'' + \theta) - \frac{dp_m^*}{d\zeta} \quad (۱۳)$$

$$F' \frac{\partial \theta'}{\partial \zeta} - \theta' \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{Gr}{Pr} \theta'' \quad (۱۴)$$

$$Y = 0, \quad F = F' = 0, \quad \theta = 0$$

$$Y = Gr^{1/2}, \quad F'' = 0, \quad \theta' = 0 \quad (الف-۱۵)$$

$$Y_c = Gr^{1/2}, \quad F(\zeta, Y_c) = \frac{Re}{Gr^{1/2}} \quad (ب-۱۵)$$

معادله‌های بقاء برای هنگامی که شار حرارتی سطح به صورت یکنواخت است تقریباً به همین روش به دست می آیند. در اینجای برای پرهیز از تکرار فقط به ذکر معادله‌ها اکتفا می کنیم. برای ناحیه اول از متغیر تشابهی استفاده می شود.

$$\eta = \left(\frac{g\beta q'' b^2}{k\nu^2 x^2}\right)^{1/2} y, \quad \psi(x,y) = \left(\frac{g\beta \nu^2 q'' b^2 x^2}{k}\right)^{1/2} f(x,\eta)$$

$$\varphi(x) = -(Gr^2 \zeta^2)^{1/2} \quad (۱۶)$$

$$\frac{f'''}{Gr^{1/2}} + \frac{3}{4} \zeta^{1/2} f f'' =$$

$$\zeta^{2/2} \left[ f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} - Gr\varphi \theta + \frac{dp_m^*}{d\zeta} \right] \quad (۱۷)$$

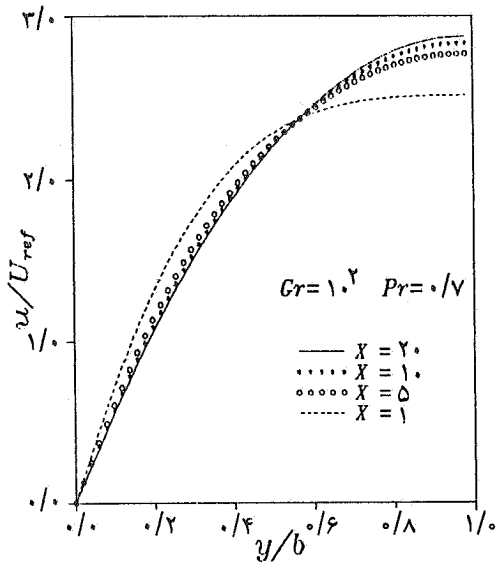
$$\frac{\theta''}{PrGr^{1/2}} + \frac{3}{4} \zeta^{1/2} (f\theta' - f'\theta) =$$

$$\zeta^{2/2} \left[ f' \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \quad (۱۸)$$

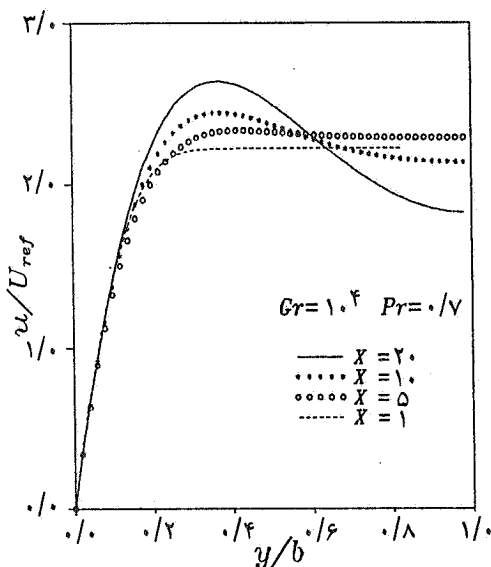
$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad \theta' = 1$$

$$\eta = \eta_c, \quad f' = \bar{u}_e, \quad \theta = 0 \quad (الف-۱۹)$$

استفاده شده است.



شکل ۲- توزیع سرعت بی بعد در چند مقطع مختلف کانال



شکل ۳- توزیع سرعت بی بعد در چند مقطع مختلف کانال

برای تبدیل معادله‌های دیفرانسیل به عبارتهای جبری، روش ضمنی کلر<sup>۲</sup> به کار گرفته شده است [۱۴]. به طور خلاصه می توان به خصوصیات این روش اشاره کرد. (۱) دقت این روش در دو جهت  $X$  و  $Y$  ضمنی (با فاصله جهت یکنواخت و یا نایکنواخت) مرتبه دوم است (۲) در جهت جریان می توان قدمهای بزرگ برداشت (۳) نوشتن برنامه کامپیوتری برای حل تعداد زیادی معادله‌های کوپله با استفاده از این روش آسان است.

برای حل معادله دیفرانسیل از روش جعبه‌ای بایستی مراحل ذیل طی شود. ابتدا معادله (یا معادله‌های) دیفرانسیل از مرتبه بالا به یک دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول کاهش داده شود. سپس با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی، دستگاه معادله‌های دیفرانسیل به یک دستگاه جبری تبدیل شود. آن گاه در صورتی که عبارتهای جبری، غیرخطی باشند بایستی خطی و سپس به صورت ماتریسی نوشته شوند. دستگاه خطی حاصل با استفاده از روش حذف بلوک سه قطری<sup>۳</sup> حل می شود.

### ۳- نتایج

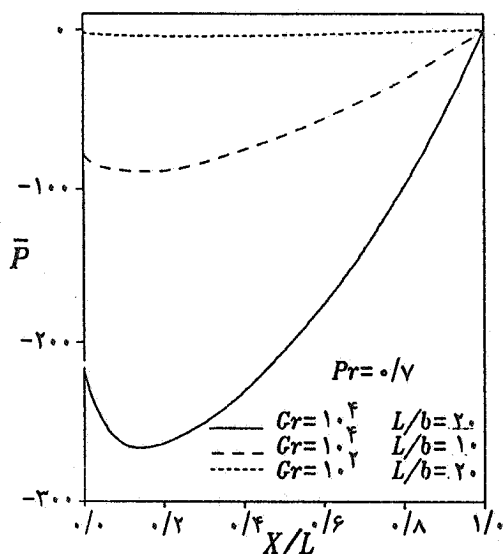
#### ۳-۱- شرط مرزی دمای یکنواخت برای سطح

شکلهای (۲، ۳، ۴ و ۵) توزیع سرعت و دمای بی بعد را در چند مقطع مختلف کانال برای اعداد گراشف  $10^2$  و  $10^4$  و عدد پرانتل  $Pr=0.7$  و نسبت طول به عرض  $L/b=20$  نشان می دهند. در مقاطع اولیه  $(X=\frac{x}{b})=1$  توزیع سرعت و دمای سیال تقریباً همان توزیع سرعت و دمای ورودی است. با فاصله گرفتن از دهانه ورودی اثر نیروی غوطه وری افزایش می یابد و توزیع سرعت و دما از توزیع سرعت و دمای ورودی فاصله می گیرد. در حالتی که اختلاف دمای سطح و سیال بیشتر است (شکل ۳) توزیع سرعت دارای یک ماکزیمم در نزدیکی سطح و یک مینیمم در صفحه تقارن کانال می شود و هنگامی که اختلاف دما کمتر (شکل ۲) و نسبت طول به عرض کانال به اندازه کافی بزرگ است، توزیع سرعت به سمت توزیع سرعت جریان کاملاً توسعه یافته جابه جایی اجباری بین دو صفحه موازی میل می کند.

در حالتی که طول به عرض کانال بزرگ و عدد رایلی کوچک است (شکل ۴) در انتهای کانال مکانیزم انتقال حرارت پیشتره

صورت هدایتی است و تقریباً دمای سیال به دمای سطح نزدیک و سیال از نظر حرارتی کاملاً توسعه یافته می شود. با توجه به شکلهای (۲ تا ۵) مشاهده می شود هنگامی که عدد گراشف کوچک است، ضخامت لایه مرزی سرعت و دما بیشتر از هنگامی است که عدد گراشف بزرگ است. بنابراین با افزایش عدد گراشف طول هیدرودینامیکی و طول حرارتی افزایش می یابند.

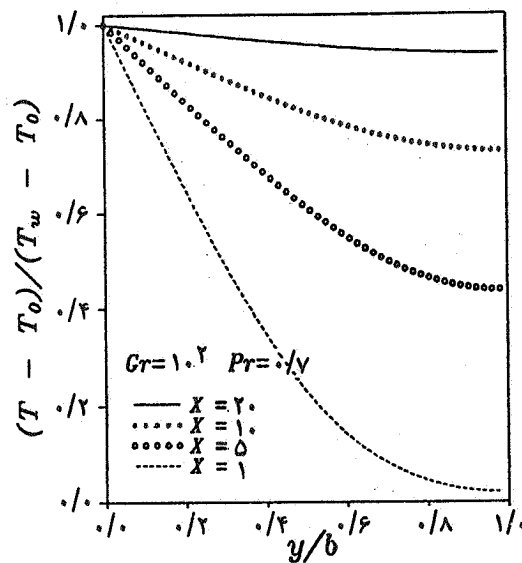
شکل (۶) تغییرات فشار بی بعد را در طول کانال برای اعداد گراشف  $10^2$  و  $10^4$  و عدد پرانتل  $Pr=0.7$  و نسبتهای



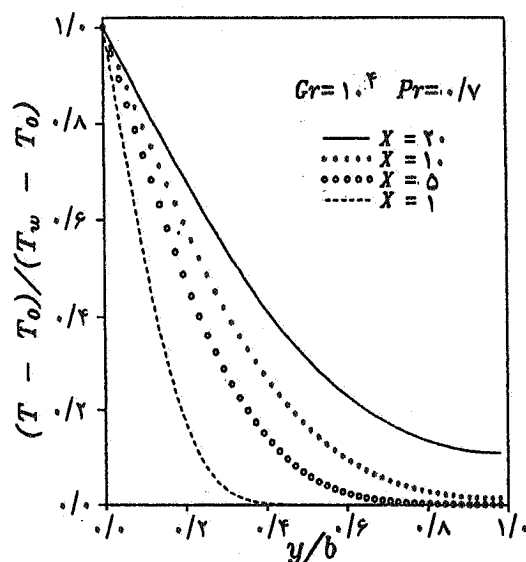
شکل ۶- تغییرات فشار بی بعد در طول کانال

ورودی و خروجی در شکل (۶) ظاهر شده است. برای یک عدد گراشف ثابت، اگر نسبت طول به عرض مجرا ( $L/b$ ) زیاد شود باز هم دبی سیال و مکش کانال زیاد می شود. این موضوع به دلیل افزایش سرعت سیال در خروجی است که از معادله تعریف سرعت جابه جایی  $U_c$  مشهود است. اگر  $\Delta T$  و پهنای کانال را ثابت نگهداریم  $Gr$  ثابت می ماند و تنها راه اضافه کردن  $L/b$  افزایش طول مجراست. با زیاد شدن طول مجرا، سرعت جابه جایی طبیعی که با  $\sqrt{L}$  متناسب است در خروجی زیاد می شود که افزایش دبی و در نتیجه مکش سیال را در پی دارد. نکته دیگری که در مورد شکل (۶) قابل ذکر است نحوه تغییرات فشار در طول کانال ( $X/L$ ) است. ملاحظه می شود که در یک نقطه ای داخل کانال فشار به حداقل می رسد و سپس افزایش می یابد.

شکل (۷) تغییرات عدد نوسلت موضعی را در طول مجرا برای همان پارامترهای شکل (۶) برای دمای ثابت سطح و  $Pr = 0.7$  نشان می دهد. اولاً با رشد لایه مرزی در جهت  $x$  که گرادیان دمای سیال در روی سطح کاهش می یابد عدد نوسلت موضعی نیز کاهش می یابد. ثانیاً با زیاد شدن عدد رینولدز که سرعتها افزایش می یابند عدد نوسلت نیز زیاد می شود. تأثیر نسبت طول به پهنای کانال ( $L/b$ ) بر عدد نوسلت نیز در شکل (۷) نشان داده شده است. کاهش عدد نوسلت به ازای افزایش ( $L/b$ ) به معنای کاهش ضریب انتقال حرارت موضعی نیست. بلکه اصولاً افزایش  $L/b$  باعث افزایش

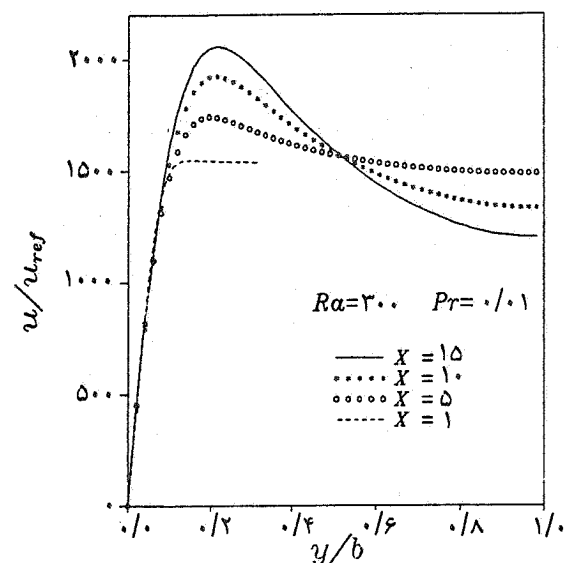


شکل ۴- توزیع دمای بی بعد در چند مقطع مختلف کانال

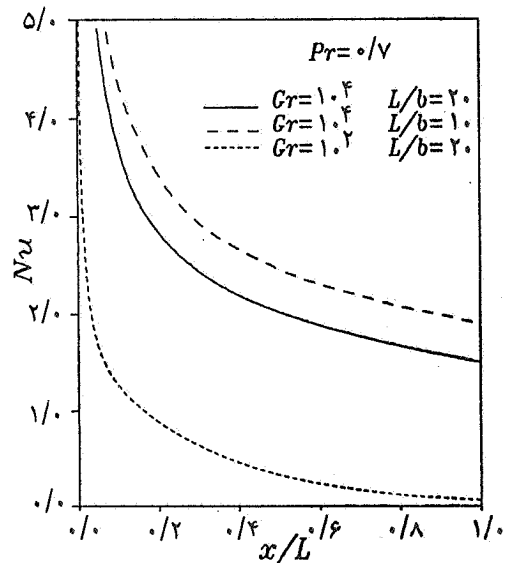


شکل ۵- توزیع دمای بی بعد در چند مقطع مختلف کانال

طول به عرض  $L/b = 10$  و  $20$  نشان می دهد. این منحنی در حقیقت میزان مکش سیال از داخل کانال و به عبارت دیگر دبی سیال از مجرا را نیز نشان می دهد. یعنی هر چه اختلاف بین فشار  $\bar{P}$  در ورودی و خروجی بیشتر باشد میزان مکش<sup>۲</sup> ایجاد شده و دبی سیال حاصل از نیروی غوطه وری بیشتر خواهد بود. واضح است که با افزایش عدد گراشف (مثلاً با افزایش  $T_w - T_c$  در حالی که سایر پارامترها ثابت بمانند) سرعت جریان طبیعی یا دبی سیال در کانال زیاد می شود. این موضوع به صورت افزایش در اختلاف فشار



شکل ۸- توزیع سرعت بی بعد در چند مقطع مختلف کانال



شکل ۷- تغییرات عدد نوسلت موضعی در طول کانال

تخت می شود در حالی که در  $X \geq 5$  ضخامت لایه مرزی به نصف پهنای کانال هم می رسد. یعنی در  $X = 1$  در ناحیه II قرار داریم. در همین شکل ملاحظه می شود که حداکثر سرعت در نقطه ای در داخل لایه مرزی واقع است. این موضوع برای نواحی I و II که در شکل (۱) نشان داده شده است صادق است ولی در ناحیه کاملاً توسعه یافته III حداکثر سرعت در وسط واقع می شود زیرا شرط مرزی گرمایی به طور کامل در سرتاسر سیال داخل مجرا نفوذ می کند. مسئله رشد لایه مرزی سرعت و دما (که برای  $Pr \leq 1$  هم منطبق هستند) در شکل (۹) واضحتر دیده می شود. این شکل نشان می دهد که ضخامت لایه مرزی برای  $x = 1$  حدوداً  $y = 0.3b$  است، در حالی که در  $X \geq 5$  عمق نفوذ شرط مرزی گرمای از صفحه تقارن مجرا نیز تجاوز کرده است. تساوی گرادیان دمای سیال بر روی سطح که در منحنی شکل (۹) دیده می شود ناشی از شار گرمای یکنواخت برای سطح است.

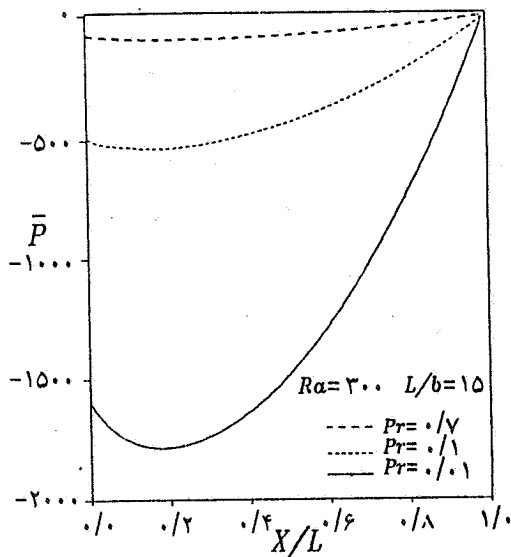
شکل (۱۰) تأثیر عدد پراتل را بر مکش سیال نشان می دهد. با کاهش عدد پراتل از  $0.1$  به  $0.7$  مکش سیال افزایش یافته و اختلاف فشار ورودی و خروجی ( $\bar{P}$  در  $x = 0$  شدیداً) زیاد می شود. به بیان دیگر کاهش عدد پراتل که به معنای زیاد شدن نفوذ گرما در مقایسه با نفوذ ممتوم است افزایش نسبی نیروی غوطه وری در مقابل اصطکاک را در پی دارد. این امر سبب افزایش دبی سیال از مجرا می شود که به صورت افزایش در مکش سیال

دبی سیال و در نتیجه افزایش ضریب انتقال حرارت می شود. اما در شکل ظاهراً خلاف این به نظر می رسد که ناشی از تغییر  $L$  است. به این ترتیب که چون عدد گراش در دو حالت مختلف یکسان است، تنها راه کاهش  $\frac{L}{b}$  در حقیقت کاهش طول مجراست. چون طول مجرا در دو حالت  $L/b = 10$  و  $20$  برابر نیست، لذا یک مقدار مساوی  $x/L$  در دو حالت دو نقطه مختلف از طول مجرا را نشان می دهد. لذا نبایستی تصور کرد که در یک  $x$  مساوی در دو حالت، مقدار  $Nu$  در  $L/b$  بزرگتر کوچکتر شده است. در حقیقت نبایستی  $Nu$  موضعی  $x$  در حالت  $L/b = 20$  را با مقدار  $Nu$  در  $2x$  در  $L/b = 10$  مقایسه کرد. به این ترتیب نتیجه همان است که افزایش  $L/b$  باعث افزایش ضریب انتقال گرمای موضعی می شود.

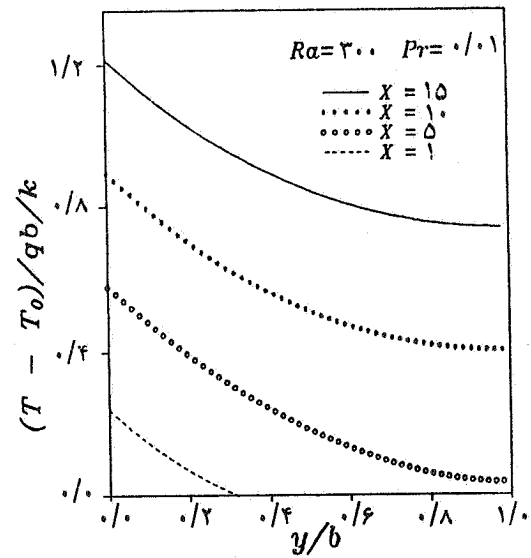
### ۳-۲- شرط مرزی شارحرارتی یکنواخت سطح

شکلهای (۸) و (۹) توزیع سرعت و دمای بی بعد در چند مقطع مختلف کانال، برای عدد رابلی  $Ra=300$  و نسبت طول به عرض  $L/b=15$  و عدد پراتل  $Pr=0.1$  نشان می دهد. این اشکال برای شرط مرزی شار گرمای یکنواخت برای سطح به دست آمده اند. شکل (۸) نشان می دهد که هرچه از دهانه ورودی دور شویم ضخامت لایه مرزی سرعت بیشتر می شود. ضخامت لایه مرزی در حقیقت آن مقدار از  $y/b$  است که از آن به بعد توزیع سرعت تخت می شود. مثلاً برای  $X = x/b = 1$  پروفیل سرعت در  $y/b < 0.3$

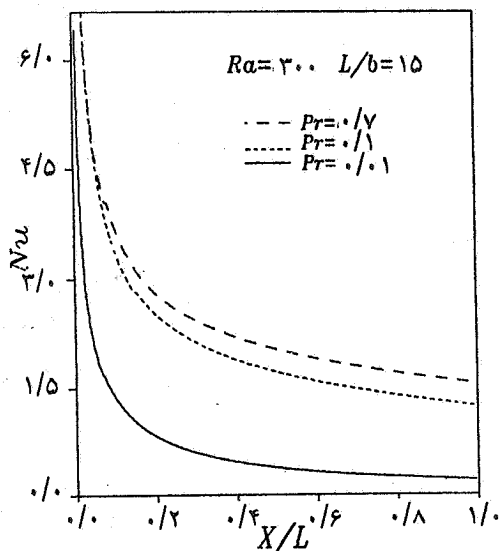




شکل ۱۰- تغییرات فشار بی بعد در طول کانال



شکل ۹- توزیع دمای بی بعد در چند مقطع مختلف کانال



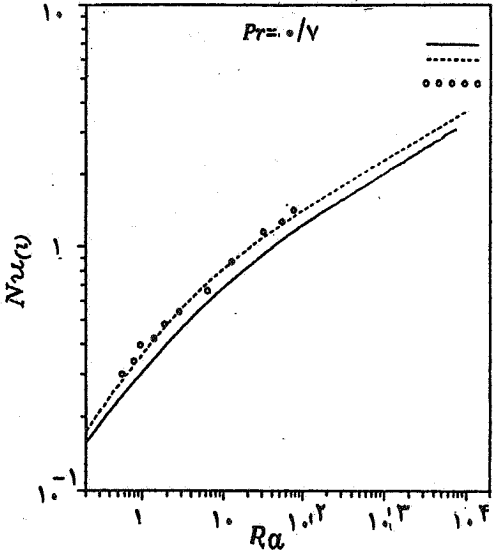
شکل ۱۱- تغییرات عدد نوسلت موضعی در طول کانال

[۱۵] با هم مقایسه شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود هنگامی که عدد رایلی کوچک است نتایج حل عددی با نتایج تجربی ریتز و استاتزمن مطابقت خوبی دارد ولی با افزایش عدد رایلی دقت نتایج حل عددی کاسته می‌شود. البته نتایج تجربی به دست آمده توسط ریتز و استاتزمن در حدود ده درصد (۰.۱۰) بر روی اندازه گیری عدد رایلی و پنج درصد (۰.۰۵) بر روی اندازه گیری دما خطا دارد [۹].

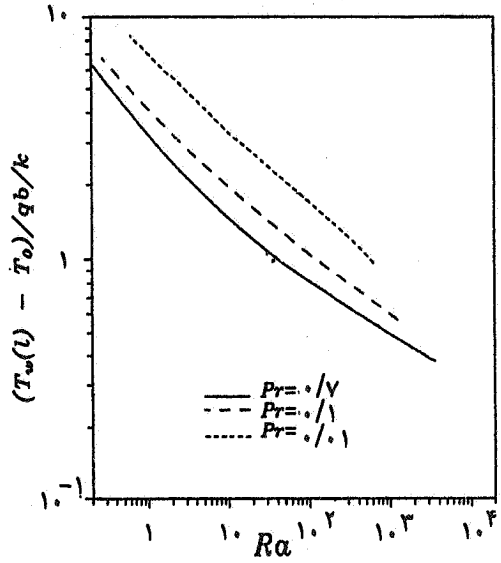
جلوه می‌کند. تأثیر عدد پرانتل بر عدد نوسلت در شکل (۱۱) نشان داده شده است. با افزایش عدد پرانتل عدد نوسلت زیاد می‌شود. این ویژگی تمام جریانهای جابه‌جایی اعم از طبیعی و اجباری است. افزایش عدد پرانتل موجب کاهش ضخامت لایه مرزی و در نتیجه افزایش گرادیان دمای سیال روی سطح و در نتیجه افزایش عدد نوسلت می‌شود.

شکل (۱۲) تغییرات دمای سطح در خروجی رابرحسب عدد رایلی برای اعداد پرانتل ۰/۱، ۰/۱، ۰/۷ و ۰/۷ نشان می‌دهد. باتوجه به روند این منحنی در اعداد رایلی کوچک دمای سطح افزایش می‌یابد. اگر به شکل (۱۳) (که تغییرات عدد نوسلت در دهانه خروجی کانال  $Nu(x=L)$  برحسب عدد رایلی را نشان می‌دهد) توجه کنیم بایستی انتظار داشته باشیم که دمای سطح با افزایش عدد رایلی کاهش یابد. در اعداد رایلی کوچک مکانیزم انتقال حرارت هدایتی است و مقدار عدد نوسلت موضعی در دهانه خروجی کم و دمای سطح در خروجی کانال بیشترین مقدار خود را دارد و با افزایش عدد رایلی مکانیزم انتقال حرارت توأم هدایتی و جابه‌جایی طبیعی است که باعث افزایش نرخ انتقال حرارت و عدد نوسلت موضعی و کاهش دمای سطح می‌شود.

شکل (۱۳) تغییرات عدد نوسلت موضعی در خروجی کانال ( $Nu(x=L)$ ) را برحسب عدد رایلی نشان می‌دهد. در این شکل نتایج حل عددی و نتایج تجربی و رابطه تجربی ریتز و استاتزمن



شکل ۱۳ - تغییرات عدد نوسلت موضعی دهانه خروجی بر حسب عدد رایلی و مقایسه با نتایج تجربی



شکل ۱۲ - تغییرات ماکزیمم دمای سطح بر حسب عدد رایلی

کراشف و اعداد پرانتل مختلف ارائه شده است. نتایج حل عددی برای عدد نوسلت با نتایج تجربی موجود مقایسه شد و دقت نتایج با توجه به عدم قطعیت در نتایج تجربی معقول به نظر می‌رسد.

واژه‌نامه

- |                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| 1. Mechul                          | 2. Keller |
| 3. block - tridiagonal elimination | 4. draft  |

۱. خسروی، محمدرضا و رستمی، علی اصغر، "جریان توأم جابه‌جایی طبیعی و اجباری در بین صفحات موازی همراه با انتقال حرارت"، سومین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، جلد اول، صفحه ۳۲۹-۳۱۷، (۱۳۷۴).

۲. خسروی، محمدرضا، حل عددی جابه‌جایی طبیعی و توأم (جابه‌جایی طبیعی و اجباری) در یک کانال عمودی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان (۱۳۷۴)

3. Elenbaas, W., "Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection," *Physica*, Vol. 9, No. 1, pp. 1 - 28, 1942.
4. Sparrow, E. M., and Gregg, J. L.,

۴- نتیجه‌گیری

جریان جابه‌جایی طبیعی آرام بین دو صفحه موازی تحت شرایط مرزی گرمایی دمای ثابت و شار گرمایی ثابت برای سطح به روش عددی حل شده است. جریان سیال داخل مجرا به دو ناحیه تقسیم شده که در ناحیه اول از روش حل نیمه تشابهی استفاده شد. معادله‌های حاکم به روش جمع‌بندی کلر حل شد و نتایج برای پارامترهای هندسی (L/b) و اعداد بدون بعد جریان مانند اعداد

مراجع

- "Laminar Free Convection from a Vertical Plate with Uniform Surface Heat Flux," *Transactions of ASME*, Vol. 78, pp. 435-440, 1956.
5. Bodia, J. R., and Osterle, J. F., "The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 84, pp. 40-44, 1962.
6. Soble, N., Landis, F., and Mueller, W., "Natural Convection Heat Transfer in Short Vertical Channels Including the Effects of Stager," *Proceedings, Third International Heat Transfer Conference*, Vol. 2, pp. 121-125, 1966.

7. Kettleborough, C. F., " Transient Laminar Free Convection between Heated Vertical Plates Including Entrance Effects, " *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 15, pp. 883-896, 1972.
8. Nakamura, H., Yataka, A., and Naitou, T., "Heat Transfer by Free Convection between Two Parallel Flat Plates," *Numerical Heat Transfer*, Vol 5, pp. 95-106, 1982.
9. Ramanathan, S., Kumar, R., and Wang, T., "Natural Convection from Heated Plates in Large Enclosures," *Proceedings of the 1988 National Heat Transfer Conference*, Houston, TX, ASME HTD-96, Vol. 2, pp. 155-163, 1988.
10. Naylor, D., Floryan, J. M., and Tarasuk, J. D., "A Numerical Study of Developing Free Convection Between Isothermal Vertical Plates, " *Journal of Heat Transfer ASME* , Vol. 113, 1991.
11. Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L., and Sammakia, B., *Buoyancy Induced Flows and Transport*, Hemisphere, pp. 52-53, 1988.
12. Cebeci, T., and Bardshaw, P., *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer-Verlag, 1984.
13. Bradshaw, P., Cebeci, T., and Whitelaw, J. H., *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flows*, Academic Press, London, 1981.
14. Keller, H.B., *A New Difference Scheme for Parabolic Problems, in Numerical Solution of Partial-Differential Equation*, Edited by J. Bramble, Vol.II, Academic, New York, 1970.
15. Writz, R. A. and Stutzman, I. J., "Experiments on Free Convection Heat Transfer," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 501-507, 1982.