نگرشی برحل عددی معادلات جریان مغشوش با استفاده از روش ادیهای بزرگ[1]

ابراهیم شیرانی

دانشگاه صنعتی اصفهان ــ دانشکده مکانیک

۱ ــ مقدمه

جریان های مغشوش دریک صدسال گذشته موردتوجه بسیار زیاد محققین ودانشمندان قرارگرفته وتحقیقات تئوری وتجربی زیادی در این مورد انجام شده است .علی‌رغم کوشش های زیادی که تاکنون صورت گرفته ،به‌علت پیچیدگی، جریانهای مغشوش هنوزازمسائل حل نشده وپیچیده علوم‌فیزیک باقی مانده است وانتظارمیرودجهت بدست‌آوردن راه حل های کلی جریانهای مغشوش راه‌طولانی وبا بی‌انتهائی درپیش باشد .

اغتشاش درجریان دراثرناپایداری جریانهای آرام ایجاد میشود .درحالت‌کلی وجودناپایداری درجریان سبب ایجادساختمان موج‌ی‌شکل درجریان شده‌که‌میتواندانرژی جریان متوسط راجذب نماید .باوجوداثرات‌غیرخطی جریان،انرژی جذب شده‌به‌مودهای دیگر انتقال یافته‌ودرنهایت جریان مغشوش ایجادمیگردد .ادیهای بزرگ، انرژی اخذشده‌ازجریان متوسط رابه‌تدریج به‌ادیهای کوچک منتقل نموده وسپس‌این انرژی به‌گرما تبدیل می‌شود .

به‌علت پیچیدگی جریان های مغشوش ،حتی مشکل‌است‌تعریف دقیقی برای چنین جریانهائی بدست‌آورد . بطورکلی میتوان خصوصیات‌جریان مغشوش رابه‌صورت زیرخلاصه کرد :

جریان مغشوش‌نامنظم وتاحدودی تصادفی[2]است .اغتشاش در جریان سبب مخلوط شدن‌سریع‌ذرات وافزایش‌نرخ انتقال حرارت، ممنتم وجرم میشود .همچنین باعث به‌تعویق افتادن جدائی[3]جریان میگردد .جریان مغشوش یک شکل یا خاصیت سیال نبوده بلکه‌خصوصیت

1.Large eddy simulation,2.Random,3.Separation,

جریان است. جریان هرسیالی‌که عددرینولدزآن ازمقدارمشخصی بیشترشود مغشوش میگردد. چنین جریانی همیشه دراعداد رینولدزبالا ایجادشده ومعمولا" ازناپایداری جریان آرام بوجودمی‌آید. جریان مغشوش همیشه سه بعدی، غیردائم[1] وکاملا" چرخشی است. نوسانات شدید ورتیسیته دراین جریانها دیده میشود. جریان مغشوش یک پدیده پیوسته است. حتی کوچکترین ذرات (ادیها) دراین جریان بسیاربزرگتراز ابعاد مولکولهای سیال است وبالاخره این جریان همیشه باعث اتلاف زیادشده وانرژی جریان متوسط سیال را به سرعت به گرما تبدیل مینماید. البته عامل ایجاد اتلاف همان ویسکوزیته سیال است.

جریان مغشوش شامل ساختمانی[2] با محدوده ابعادی بسیار وسیع است. مجموعه مولکولها که تشکیل ذرات با عملکردمشابهی را درجریان میدهند "ادی"[3] گویند. ابعاد ادیهای موجوددرجریان مغشوش بسیار متنوع میباشند. ساختمان ادیهای بزرگ که ابعادشان تا ابعاد هندسی میرسد، ازیک جریان تا جریان دیگرکاملا" متفاوت بوده درحالیکه ادیهای کوچک بستگی به نوع جریان نداشته وساختمان آنها شکل کلی (یونیورسال) دارند.

اغتشاشات موجوددرجریان مغشوش را نمیتوان ازطریق تجربی ویا تئوریک بطوردقیق بدست آورد. درصورتیکه حل دقیق معادلات ناویراستوکزدردسترس بودمیتوانستیم اغتشاشات را بدست آوریم*. ولی اشکال کار این است که باکامپیوترهای موجودفقط میتوان جریانهای ساده وبا عددرینولدزکم‌که اندازه ادیهای داخل جریان چندان کوچک نیستند را محاسبه نمود. انتظارمیرودحتی با استفاده ازکامپیوترهای دونسل آینده هم نتوان جریان مغشوش را درحالت کلی حل نمود.

درحال حاضرقسمت اعظم روشهای بررسی جریانهای مغشوش استفاده ازایده آسبرن رینولدز1883[1] میباشد. بدین ترتیب که از

1.Unsteady, 2.Structure, 3.Eddy ,

*لازم به توضیح است که این موضوع درحالتی صادق است که رفتار نیوتنی سیال ونتیجه معادلات ناویراستوکزبتواندجریان مغشوش‌سیال‌راتوجیه‌کند.

طریق انتگرال گیری، از معادلات ناویر - استوکز نسبت به زمان یا مکان متوسط گرفته و این معادلات را برحسب سرعتهای متوسط جریان می‌نویسیم. از طرفی از آنجا که معادلات غیرخطی هستند، معادلات متوسط جریان شامل عبارات مربوط به اغتشاشات جریان بوده و لازم است این عبارات مدل شوند تا بتوان معادلات را حل نمود. مدل کردن اغتشاشات جریان در ربع قرن اخیر به شدت مورد توجه قرار گرفته است و انتظار می‌رود این روند با شدت بیشتری در سالهای آینده ادامه یابد. در این مورد خواننده میتواند به مراجع [۲] و [۳] مراجعه نماید. علی‌رغم تلاش زیاد در این رابطه، به علت اشکالات موجود در نحوهٔ برخورد به مسئله در روش استفاده از معادلات متوسط جریان، نمی‌توان نتایج دقیقی از این روش بدست آورد.

در مقاله حاضر یک روش جدیدتر برای بررسی جریانهای مغشوش معرفی می‌گردد. در این روش که معادلات جریان برای ادیهای بزرگ حل شده و ادیهای کوچک جریان مدل می‌شوند، از این خاصیت استفاده میشود که ادیهای کوچک در کلیه جریانهای مغشوش شکل کلی ویونیورسال داشته و رفتاری مشابه دارند و نیز این ادیها نقش کمی در رفتار جریان متوسط و ادیهای بزرگ ایفاء می‌نماید. درحالیکه ادیهای بزرگ قسمت اعظم انرژی اغتشاشات را دارا بوده و از یک جریان تا جریان دیگر متفاوت هستند و نمی‌توان مدل یونیورسالی برای آنها بدست آورد. این گونه برخورد به مسئله در مقایسه با نحوهٔ بررسی معمول جریانهای مغشوش، که همان بررسی معادلات انتگرالی و یا معادلات دیفرانسیلی متوسط جریان است، مزایای عمده‌ای دارد. در روش معمول جریان متوسط ادیهای بزرگ و کوچک هردو مدل می‌شوند و از آنجا که ادیهای بزرگ رفتاری کاملا" متفاوت از یک جریان تا جریان دیگر دارند، مدل کردن آنها مشکل و یا با خطای زیاد امکان پذیر است و یا اینکه لازم است برای هر جریان مشخصی مدل خاص خود را بکار برد که این خود خالی از اشکال یافتن مدل مناسب نیست. از نتایج روش ادیهای بزرگ می‌توان در طراحی سیستمهای با تکنولوژی بالا استفاده نمود.

همچنین می‌توان مدل های مورداستفاده درروش جریان متوسط که معمولاً" برای حل مسائل مهندسی معمولی کافی است ، راتست نمود وبهبودبخشید. البته استفاده ازروش بررسی ادیهای بزرگ مستلزم داشتن کامپیوترهای بزرگ وصرف وقت وانرژی زیادی می‌باشد.

درمقاله حاضرابتدابه اختصارروشهای معمول برخوردبه مسئله (حل جریانهای مغشوش) را مرورکرده ، سپس به تاریخچه وکارهای انجام‌شده درزمینه‌روشهای ادیهای بزرگ پرداخته میشود. بالاخره روش ادیهای بزرگ باشرح بیشتری بررسی میگردد. درقسمت آخر نحوهٔ جداسازی ادیهای بزرگ ازادیهای کوچک ، روش حل عددی معادلات ونتایج حاصله به‌بحث گذاشته می‌شود.

۲ - روش بررسی جریانهای مغشوش

دراین قسمت به روشهای بررسی جریانهای مغشوش می‌پردازیم. ابتداانواع مختلف جریانهای مغشوش رابراساس نوع جریان به اختصار موردبررسی قرارمی‌دهیم. بطورکلی جریانهای مغشوش‌را می‌توان به سه دسته جریان همگن[1] ، جریان برشی آزاد[2] ، وجریان نزدیک دیواره[3] (لایه مرزی)[4] تقسیم کرد. درجریانهای همگن حالت سیال به مکان بستگی نداشته ودرهمه‌جای جریان یکسان است وفقط بازمان تغییرمی‌کند. جریانهای برشی بانرخ تغییرشکل زاویه‌ای ثابت نمونه‌ای ازجریانهای همگن است. جریانهای برشی‌آزادازقبیل جریان برخواسته[5] ویاجت[6] بسیارناپایداری میباشند. تمرکزورتیسیته دراین جریان ها سبب ایجاد حرکات ادیهای بزرگ درجریان‌شده واین خودسبب تشدیداغتشاش درجریان میگردد. بالاخره درلایه مرزی مغشوش به‌علت وجوددیواره ، ادیهای بزرگ وحرکت های ناپایدارآنها که در جریانهای برشی آزاددیده‌میشودوجودندارد ، ولایه مرزی وسایرخواص مغشوش جریان بانرخ کمتری توسعه یافته واغتشاشات کمتری درجریان دیده میشود. درعوض مکانیزم تولیداغتشاش درجریان نسبت به حالت

1.Homogeneous flows,2.Free-Shear flows,3.Wall-bounded flows,4.Boundary layer flow,5.Wake,6.Jet flow,

جریانهای برشی آزادناشناخته‌تربوده وبه‌همین دلیل این نوع جریان راپیچیده‌ترمینماید.

درکلیه‌جریانهای فوق،روشهای بررسی جریانهای مغشوش بر اساس نحوه‌ء مدل کردن اغتشاشات درجریان را می‌توان بصورت زیر تقسیم بندی کرد.

الف ــ روابط تجربی[1]

روابط تجربی متعددی می‌توان یافت که‌ضریب اصطکاک جریان مغشوش روی دیواره‌برحسب عددرینولدزویا عددنوسلت رابرحسب عدد رینولدز وعددپارانتل نشان می‌دهد.این روابط بسیارمفیدبوده و مورداستفاده‌زیادی قرارمی‌گیرند.البته‌هریک ازاین روابط در محدوده‌ء مشخصی صادق بوده‌وعمومیت ندارد.محدودیت استفاده‌ازاین روابط مخصوصا " درکاربردهای باتکنولوژی بالا که‌درآن هندسه مسئله‌رل مهمی راایفاء می‌نمایدنمایان می‌گردد.درچنین مسائلی (مثل جریان روی ایرفویل)باتغییرجزئی هندسه‌مسئله،روابط تجربی جداگانه‌ای بایدبدست آورد.

ب ــ روش‌های انتگرالی

درچنین روش‌هائی معادلات اصلی جریان سیال دراامتداد لااقل یکی ازمحورهای مختصات انتگرال گیری می‌شود.به‌این ترتیب تعدادمتغیرهای مسئله‌کاهش یافته‌وروابط ریاضی مسئله‌راتاحدزیادی ساده‌می‌نماید.درروشهای انتگرالی ازنتایج تجربی وفیزیک مسئله میتوان استفاده‌نمود.نتایج حاصل ازچنین روشهائی بسیارمفید بوده‌ومورداستفاده‌زیادی قرارمی‌گیرد.اشکال عمده‌این روشها این است که‌برای هرنوع‌جریان مشخصی بایدروابط خاص خودرانوشته‌وساده کرد.ضمنا "نتایج حاصل ازاین‌روشها،رفتارکلی جریان رابدست میدهد.

1.Correlations.

ج ــ معادلات متوسط جریان

در این روش معادلات ناویر ــ استوکز نسبت به زمان و یا مکان با فاصله زمانی نسبتاً " کوچک انتگرال گیری میشود. نتایج حاصل، معادلات متوسط جریان یا معادلات متوسط رینولدز[1] نامیده میشود. معادلات متوسط بدست آمده که جریان متوسط سیال را توصیف مینمایند، شامل مقادیر متوسط حاصل ضرب مؤلفه های نوسانی سرعت نیز میباشند که بصورت عبارات مجهول به تعداد مجهولات معادله افزوده میشوند. درحقیقت به این ترتیب هرگز نمیتوان از طریق انتگرال گیری مجدد معادلات سرعت های نوسانی سیال، تعداد معادلات و مجهولات رایکسان کرد. معادلات جریان در هربار انتگرال گیری، شامل عبارات با مجهولات جدیدی میباشند که باید آنها را مدل کرد ولذا لازم است از مدل هائی برای عبارات مجهول استفاده نمود. این مسئله درحال حاضر مورد توجه زیاد محققین بوده وسهم زیادی در تحقیقات روی جریانهای مغشوش را به خود اختصاص داده است.

د ــ روش ادیهای بزرگ

در روش ادیهای بزرگ معادلات نسبت به فواصل بسیار کوچک انتگرال گیری میشود ودرنتیجه اغتشاشات (نوسانات) بسیار ریز که مربوط به ادیهای کوچک درجریان میباشد از معادلات حذف میگردند و معادلات بدست آمده معرف رفتار ادیهای بزرگ درجریان میباشند. اثرات ادیهای کوچک برروی ادیهای بزرگ ازطریق مدل کردن آنها در معادلات منظور میگردد. دراین گزارش به مقدار زیادی درارتباط با روش بررسی ادیهای بزرگ بحث خواهد شد.

هـ ــ روش حل کامل معادلات جریان

دربررسی حل کامل معادلات جریان، حل عددی معادلات کامل ناویر ــ استوکز بدون مدل سازی موردبررسی قرار میگیرد. تنها خطای حاصل ازاین بررسی، دراثر خطاهای حل عددی مسئله میباشد. دراین

1. Reynolds average equations,

روش میتوان کلیه ادیهای ازکوچک تا بزرگ رادرجریان محاسبه و رفتار آنها رابدست آورد. برای این کارلازم است اندازه فاصله دو نقطه متوالی درحل عددی معادلات آنقدرکوچک باشدکه ازاندازه ادیهای کوچک درجریان کوچکتر باشدوتعداد نقاط درهر بعدبا یدبه اندازه ای باشدکه کلیه ادیهای بزرگ درجریان راشامل شود.

روشهای مذکوردربندهای "د"و"ه" درفوق ،صرفا" ازطریق استفاده ازکامپیوترهای بزرگ وسریع امکان پذیرمیباشد. این روشها درحال حاضرمورداستفاده مهندسین طراح قرارنگرفته ولی ممکن است جای خودرا باز کنند.

مسئله مهم این است که درتقسیم بندی فوق،محاسبات درهرسطحی میتواند اطلاعاتی را بدست دهدکه درسطوح پائین تر ازآن مورداستفاده قرارگیرد. مثلا" نتایج حاصل ازروش بررسی کامل معادلات جریان میتواننددرتعیین مدلها درروش ادیهای بزرگ ومعادلات متوسط جریان مورداستفاده قرارگیرد. نتایج حاصل ازروش ادیهای بزرگ میتوانند درمدل کردن عبارات درمعادلات متوسط جریان قرارگیرد. معمولا" مهندسین طراح ازروشهای مندرج دربندهای "ب" و"ج" استفاده نموده تا بتوانند "روابط تجربی" راتکمیل نموده ومورد استفاده قرار دهند.

۳ - مروری برکارهای انجام شده

تاکنون هیچگونه جواب تحلیلی معادلات ناویراستوکز برای جریان مغشوش بدست نیامده است وانتظار نمیرودکه بتوان به حلهای تحلیلی برای چنین جریانهائی دست یافت. ازطرفی به علت اهمیت تکنولوژیکی جریان مغشوش نیاز به بررسی چنین جریانهائی وتوسعه روشهای محاسباتی جهت پیش بینی آنها محسوس است. تاقبل ازسال 1960، به علت دردست نبودن کامپیوترهای با حافظه زیاد،تنها به حل معادلات دیفرانسیلی معمولی که ازطریق معادلات انتگرالی حاصل میشدندویا جریانهای ساده دوبعدی پتانسیل ازطریق کامپیوتر اکتفا میشد. پیشرفت دراین زمینه عمدتا" دراثرنبودن کامپیوترهای بزرگ

محدود می‌شد. در دهه 1960 با پیچیده‌ترشدن و بزرگترشدن کامپیوترها روش های بررسی لایه مرزی از دو طریق انتگرالی و دیفرانسیلی آغاز گردید و در آن زمان محققین شروع به حل معادلات دیفرانسیلی متوسط جریان برای جریان های ساده نمودند. از سالهای 1970 تا کنون، مدلهای پیچیده‌تری برای جریان مغشوش توسعه یافته و همچنین جریانهای پیچیده‌تری مورد بررسی قرار گرفته است.

اولین قدمی که در رابطه با روش ادیهای بزرگ برداشته شد توسط سماگورینسکی (1963) [۴] بود که جریان سه بعدی هوای اطراف جو را بررسی نمود. وی با استفاده از مدلی که ارائه نمود، ادیهای بزرگ جریان را از ادیهای کوچک جدا نموده و ادیهای بزرگ را مطالعه کرد. البته در آن زمان به علت کمبود حافظه کامپیوتر وی توانست فقط برای حالتی که تعداد نقاط داخل جریان سیال نسبتاً "کم باشند، مسئله را حل کند.

دیردراف (1970) [۵] جریان درداخل کانال را با استفاده از روش ادی های بزرگ بررسی نمود و نتایج بسیار جالب و اساسی از جریان داخل کانال ارائه داد. سپس شومان (1973) [۶] و گرتربت (1978) [۷] روش وی را دنبال کرده و توسعه دادند. در سال (1972) در دانشگاه استانفورد گروهی تحت ریاست پروفسور ویلیام رینولدز کار روی محاسبات عددی جریان از طریق روش ادیهای بزرگ را شروع کردند. این گروه جریانهای ساده مغشوش را مطالعه و از طریق نتایج آن مبانی جریانهای مغشوش را مورد بررسی قرار دادند. کواک (1975) [۸] شانن (1975) [۹] جریان مغشوش همگن را بررسی و ادیهای کوچکتر از فواصل بین نقاط در محاسبات عددی را مدل نمودند. منصور (1978) [۱۰] جریان برشی آزاد از نوع اختلاط لایه ها [1]، الن کین (1978) [۱۱] جریان برشی آزاد در ناحیه گذرا و پرویز معین (1978) [۱۲] جریان درداخل کانال را بررسی نمود. کلارک (1978) [۱۳]، مکمیلان و فرزیگر (1979) [۱۴] و باردنیا (1980) [۱۵] معادلات دیفرانسیل را از طریق کامپیوتر بطور دقیق حل کرده و ادیهای کوچک را مدل نمودند. ابراهیم شیرانی (1981) [۱۶] حل دقیق معادلات

1.Mixing layer,

را برای جریان برشی وهمگن هرماه با تغییردرجه حرارت به عنوان یک کمیت اسکالرغیرفعال موردبررسی قراردادواصول روش ادیهای بزرگ راآزمایش نمود .لزلی (1979)وگوارینی ولزلی (1979)[۱۷] – مدل های ادیهای کوچک رابررسی نمودند .

۴ – روش ادیهای بزرگ

دراین قسمت به تشریح روش ادیهای بزرگ پرداخته میشود . ابتدا به اصولی که براساس آن این روش استوار است پرداخته ،بعدبه نحوهٔ جداسازی ادیهای بزرگ ازادیهای کوچک(فیلترکردن معادلات)، سپس مدل کردن ادیهای کوچک ودرنهایت به روش حل معادلات پرداخته می‌شود .

الف – اصول روش ادیهای بزرگ

هما نطوریکه درمقدمه آمد ،ساختمان جریانهای مغشوش از طولهای مبنای متفاوتی تشکیل شده است که با توجه به اهمیت ونقش آنها درجریان ،می‌توان ساختمان جریان مغشوش را به دوقسمت ادیهای بزرگ وادیهای کوچک تقسیم کرد . جدول (۱)تفاوت ونقش هریک ازاین دورا مشخص می‌کند .

با توجه به مطالب مذکوردراین جدول که درآن مبانی روش ادیهای بزرگ آمده است ،می‌توان نتیجه گرفت که ادیهای بزرگ را میتوان به سختی مدل کرد ،درصورتیکه ادیهای کوچک قابل مدل شدن هستند . مدلهای ادیهای بزرگ نمی‌توانندیونیورسال باشندوازیک جریان تا جریان دیگرمتفاوت می‌باشد ،ولی انتظارمی‌رودبرای ادیهای کوچک، بتوان مدل یونیورسالی بدست آورد .

مباحث فوق منجربه طرح روش ادیهای بزرگ می‌شودکه درآن ساختمان وشکل ادیهای بزرگ درجریان محاسبه می‌شودوادیهای کوچک مدل میگردند .البته اصول مذکوردرجدول(۱)درتمام جریانها صادق نمی‌باشد .این اصول درجریانهای برشی آزادوجریانهای همگن صادق بوده ولی درلایه مرزی مخصوصا" درنزدیکی دیواره ،به علت اینکه دراین

جدول شماره ۱ وجه تمایز ادیهای بزرگ و کوچک در جریانهای مغشوش

ردیف	ادیهای بزرگ	ادیهای کوچک
۱	ادیهای بزرگ توسط جریان متوسط سیال بوجود آمده و با آن تبادل انرژی و ممنتم مینمایند.	ادیهای کوچک در اثر رفتار غیر خطی ادیهای بزرگ بوجود میآیند و انرژی و ممنتم خود را از ادیهای بزرگ دریافت میکنند.
۲	قسمت اعظم انتقال جرم، ممنتم، انرژی و ذرات[1] در جریان مغشوش توسط ادیهای بزرگ انجام میشود.	ادیهای کوچک، انرژی اخذ شده از ادیهای بزرگ را به گرما تبدیل میکنند و اثر زیادی روی جریان متوسط ندارد.
۳	شکل و ساختمان ادیهای بزرگ به مقادیر زیادی به هندسه مسئله و طبیعت جریان (نوع جریان) بستگی دارد.	شکل و ساختمان ادیهای کوچک معمولا" به هندسه و نوع جریان بستگی نداشته و در کلیه جریانهای مغشوش مشابه اند.
۴	ادیهای بزرگ معمولا" بسیار غیر ایزتروپیک هستند.	ادیهای کوچک معمولا" ایزتروپیک و در نتیجه دارای شکل کلی هستند.
۵	زمان مبنای[2] ادیهای بزرگ[3] تقریبا" برابر زمان مبنای جریان متوسط است. مثلا" در جریانی که از روی جسمی عبور میکند، زمان مبنای ادیهای بزرگ متناسب با نسبت طول جسم به سرعت جریان آزاد سیال است.	زمان مبنای ادیهای کوچک بسیار کوچکتر از ادیهای بزرگ است یعنی طول عمر آنها خیلی کمتر از ادیهای بزرگ است.

1. Concentration, 2. Time-scale, 3. Life-time of large scale stauctures.

جدول شماره ۲ مقایسه روشهای ادیهای بزرگ وجریان متوسط

ردیف	روش ادیهای بزرگ	روش جریان متوسط
۱	درروش ادیهای بزرگ قسمت اعظم انتقال جرم ،ممنتم ،انرژی وذرات توسط جریان مغشوش مستقیماً" محاسبه میشود وفقط آن قسمت از خصوصیات جریان مدل میشود که نقش بسیار کمی در انتقال جرم، ممنتم وانرژی دارند.	انتقال جرم ،ممنتم ،انرژی و ذرات در جریان مغشوش درروش جریان متوسط کلا" مدل میشود
۲	نتایج کلی بدست آمده از روش ادیهای بزرگ نسبت به مدل انتخاب شده برای ادیهای کوچک غیرحساس بوده ومیتوان یک مدل با جامعیت بیشتر برای تمام جریانها بدست آورد.	مدل انتخابی برای اغتشاشات وجریان جامعیت نداشته ودر هرجریانی مدل مشخصی باید انتخاب نمود.
۳	معادلات جریان برای ادیهای بزرگ سه بعدی وغیردائم بوده ولذا نیاز به حل معادلات از طریق عددی وبااستفاده از کامپیوترهای بزرگ میباشد ومستلزم صرف وقت وهزینه زیاد است.	معادلات جریان متوسط عموماً "به صورت معادلات دیفرانسیلی معمولی (ODE) بوده وبراحتی از طریق حل عددی معادلات قابل حل میباشد.

ناحیه عامل انتقال ممنتم وسایرخواص جریان می‌تواندادی هــــای کوچک جریان باشند، لزوما " صادق نمی‌باشندوبایددربررسی چنیـــن حالتی با دقت بیشتری به مسئله برخوردکرد .
برای روشن ترشدن مطلب دراینجا به مقایسه روش ادیهای بزرگ بــا روش معمولی بررسی متوسط جریان می‌پردازیم .جدول(۲)این دو روش را باهم مقایسه می‌کند .

ب ـ معادلات جریان برای ادیهای بزرگ

بطورکلی معادلات جریان برای جریان غیرقابل تراکم شامل معادلات بقای جرم وممنتم (به فرم تنسوری)بصورت زیرمی‌باشد :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (۲)$$

که درآن u_i مولفهٔ سرعت، p فشار، ρ دانسیته، ν ویسکوزیته سینماتیکی، t زمان، x طول درامتداد محورهای دستگاه مختصات کارتزین وزیرنویس i و j می‌توانداز یک تا سه تغییرکند .

جهت بدست آوردن معادلات جریان برای ادیهای بزرگ لازم است درمعادلات جریان سیال ، ادیهای بزرگ راازادیهای کوچک جداکرده و سپس ادیهای کوچک رامدل کنیم .این کارمشابه روش رینولدز بـرای بدست آوردن جریان متوسط سیال است .روش های ریاضی متعددی وجود داردکه توسط آن می‌توان ادیهای بزرگ راازادیهای کوچک جداکرد . درکلیه این روشها سعی می‌شوداز طریق انتگرال گیری معادلات جریان برحسب ابعاد هندسی کوچک (ویا فیلترکردن معادلات جریـــــان در فرکانسهای بالادرفضای فوریه)ادیهای کوچک جریان راحذف ویا جـدا نمود .برای جریان ممکن ادیهای بزرگ ازطریق فیلترکانولوشـــن بصورت زیربدست می‌آید .

$$\bar{u}(\underline{r}) = \int G(|\underline{r}-\underline{r}'|)\,\underline{u}(\underline{r}')\,d\underline{r}' \qquad (۳)$$

یا درفضای فوریه :

$$\hat{\bar{u}}(\underline{k}) = \hat{G}(\underline{k})\,\hat{u}(\underline{k}) \qquad (۴)$$

که درآن بالانویس "^" معرف تابع درفضای فوریه ،زیرنویس" - "معرف بردار وبالانویس "-" معرف تابع فیلترشده است .
فیلتر G میتواند به فرم توابع مختلفی باشد .معمولاً" توابعی که بکار رفته است عبارتند از : تابع پله ای،تابعی که درفضای فوریه پله ای باشد ، ویا تابع گوس .دوتابع اول علی رغم اینکه مورد استفاده زیادی قرار گرفته اند وفرم ساده ای دارند ،به علت اینکه سری فوریه آنها دارای مقادیر منفی بوده ونیز مشتق گیری ازآنها مشکل است ،مشکلاتی راایجاد می نماید . لذا تابع گوس برای این کار پیشنهاد میگردد .این تابع ابتدا توسط لئونارد (1973)[۱۸]پیشنهاد شده است . مزیت چنین تابعی این است که تبدیل فوریه آن نیز به فرم تابع گوس است .بنابراین تابع G رابصورت زیرتعریف می کنیم :

$$G(\underline{r}) = Ae^{-6r^2/\Delta^2} \qquad (۵)$$

و

$$\hat{G}(\underline{k}) = e^{-k^2\Delta^2/24} \qquad (۶)$$

ضریب عددی درتوان رابطه فوق طوری انتخاب شده است که ممان دوم رابطه فوق با تابع پله ای به عرض Δ یکی شود .معمولاً" Δ برابر فاصله دونقطه متوالی درحل عددی معادلات دیفرانسیل است واین فاصله طوری انتخاب می شود که برابرکوچکترین اندازه ادیهای بزرگ بوده ولی ادیهای کوچک راشامل نشود .به همین علت ادیهای کوچک را SGS[1] گویند.
ضریب A دررابطه فوق طوری انتخاب می شودکه اصل بقای جرم ،ممنتم و انرژی درمیدان جریان همچنان صادق باشد.

1.Subgrid scale,

با استفاده از رابطهٔ (۳)، روابط (۱) و (۲) را فیلتر کرده و داریم:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (۷)$$

و

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i u_j}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (۸)$$

از طرفی خواص ادیهای کوچک SGS را می‌توان از تفاضل خواص جریان کلی وجریان فیلترشده بدست آورد و یا:

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \qquad (۹)$$

و

$$p = \bar{p} + p' \qquad (۱۰)$$

که درآن بالانویس "′" معرف خواص ادیهای کوچک است ولذا داریم:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j')} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' u_j'} \qquad (۱۱)$$

دررابطه‌فوق اولین عبارت سمت راست تساوی معرف خواص ادیهای بزرگ بوده وسه‌عبارت دیگر سمت راست تساوی شامل خواص ادیهای کوچک یا SGS است. این سه‌عبارت درمعادلات جریان ادیهای بزرگ ظاهر می‌شود ولازم است برحسب خواص ادیهای بزرگ‌مدل شوندتا بتوان معادلات را حل کرد. به این سه‌عبارت "تنش برشی رینولدز SGS" گویندوآنها را با R_{ij} نمایش می‌دهند.

$$R_{ij} = \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' u_j'} \qquad (۱۲)$$

از طرفی ماتریس R_{ij} را میتوان به دوقسمت زیرتقسیم‌کرد:

$$R_{ij} = \zeta_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij} R_{kk} \qquad (۱۳)$$

که درآن ζ_{ij} ماتریس بدون قطر[1] می‌باشد. بالاخره عبارت R_{kk} را با رابطه فشار p، درمعادله جریان جمع می‌کنیم:

$$\bar{P} = \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{3} R_{kk} \qquad (۱۴)$$

ولذا معادلات ادیهای بزرگ بصورت زیردرمی‌آید:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (۱۵)$$

و

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j}) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \zeta_{ij}}{\partial x_j} \qquad (۱۶)$$

ازآنجاکه انتقال انرژی ازجریان متوسط عمدتا" به ادیهای بزرگ منتقل می‌گرددونیزادیهای کوچک کارافت انرژی مکانیکی و تبدیل آن به‌گرما راانجام می‌دهند، مرزبین ادیهای کوچک وبزرگ در ناحیه‌ای است که افت انرژی‌مکانیکی به‌گرما[2] ونیزانتقال انرژی از جریان متوسط به‌اغتشاشات[3] مینیمم باشد. برهمین اساس عرض فیلتر یافاصله‌بین دونقطه متوالی درمحاسبات عددی جریان سیال، Δ باید طوری انتخاب گرددکه‌پس ازفیلترشدن خواص جریان ، کلیه‌ادیهای بزرگ راشامل شده ولی‌ادیهای کوچک راحذف نماید. ازطرفی ابعاد هندسی مسئله بایدآنقدربزرگ انتخاب شوندتاتمام ادیهای بزرگ مسئله راشامل گرددوبراین‌اساس تعدادنقاط درمحاسبه‌عددی مشخص میگردد (برای اطلاعات بیشتررجوع کنیدبه[۱۶]).

درمعادله (۱۶) عبارت آخرسمت راست شامل خصوصیات ادیهای کوچک است وبایستی مدل شود. مدل های متعددی برای این عبارت پیشنهادشده است. این مدل هاعمدتا" مشابه‌مدل های موجودبرای عبارات تنش های رینولدزازمعادلات متوسط جریان می‌باشد. رابطه زیربرهمین اساس بدست‌آمده است:

$$\zeta_{ij} = 2\nu_T \overline{S_{ij}} \qquad (۱۷)$$

1.Traceless matrix,2.Viscous dissipation,3.Turbulent energy production,

که در آن ν_T ادی ویسکوزیته و S_{ij} نرخ تغییرشکل زاویه‌ای بوده و ـ بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \qquad (۱۸)$$

بسیاری از محققین ν_T را بصورت زیر مشخص کرده‌اند :

$$\nu_T = (C\Delta)^2 |\bar{S}| \qquad (۱۹)$$

که در آن Δ طول مبنا در مسئله بوده و برابر فاصله دو نقطه متوالی در حل عددی معادلات می‌باشد و :

$$|\bar{S}| = |\bar{S}_{ij}\ \bar{S}_{ij}|^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۰)$$

می‌باشد. مدل ادی ویسکوزیته به فرم فوق در روش جریان متوسط رینولدز بسیار موفق بوده و انتظار می‌رود در روش ادیهای بزرگ نیز موفق باشد. نتایج حاصل از بکاربردن مدل فوق در روش ادیهای بزرگ برای جریانهای همگن و نیز جریانهای برشی نشان می‌دهد که این مدل بسیار مناسب می‌باشد [۱۶] و حتی استفاده از روشهای پیچیده‌تر معمول مثل روش یک پارامتری یا دو پارامتری که در حل معادلات انتگرالی جریان متوسط در لایه مرزی از آن استفاده می‌شود، نتایج بهتری ارائه نمی‌دهد.

ج ـ روش حل عددی معادلات ادیهای بزرگ

روابط (۱۵) و (۱۶)، معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای غیرخطی معرف جریان ادیهای بزرگ می‌باشد. طبیعی است این معادلات حل تحلیلی نداشته و لازم است از طریق عددی حل شوند. از طرفی برای حل این معادلات لازم است شرایط مرزی و شرایط اولیه مسئله مشخص گردند. در اینجا ضمن تعیین روش بدست آوردن شرایط اولیه و مرزی مسئله، به روش حل معادلات از طریق عددی پرداخته می‌شود.

تعیین شرایط اولیه کار ساده‌ای نیست زیرا برای این کار لازم است جزئیات جریان سیال را داشته باشیم و چنین جزئیاتی نه از طریق تجربی (آزمایش) و نه تئوری قابل تعیین است. یک روش تعیین شرایط اولیه مسئله از طریق مصنوعی و ساختگی است. به این صورت که

میدان جریانی بدست آوریم که اولا" اصل بقای جرم در آن صادق بوده و ثانیا" انرژی اغتشاش لازم را دارا باشد هرچندکه جزئیات ساختمان ادیهای آن دقیقا" با واقعیت یکی نباشد. برای این کار قدمهای زیر برداشته میشود [۱۶].

- برای هر مولفه سرعت در هر نقطه [1] یک عدد رندم (مثلا" بین صفر تا یک) انتخاب میکنیم.
- کرل اعداد انتخابی فوق را بدست میآوریم. نتیجه حاصل دارای دیورجانس صفر بوده و لذا میتوانند بصورت یک میدان سرعت غیرقابل تراکم مورد استفاده قرار گیرد.
- تبدیل فوریه میدان سرعت بدست آمده را محاسبه کرده و با داشتن اسپکترم انرژی [2] جنبشی موردنیاز، مقادیر موردنیاز میدان سرعت درفضای فوریه انتخاب میشوند. سپس با تبدیل معکوس فوریه میدان سرعت مناسب که همگن بوده و دارای دیورجانس صفر است بدست میآید. نتیجه حاصل را میتوان بعنوان شرط اولیه مورد استفاده قرار داد.

ازآنجا که معادلات دیفرانسیلی پاره ای (۱۵) و (۱۶) غیرخطی بوده، همیشه نمیتوان دانست چه شرایط مرزی برای حل مسئله لازم است و آیا مسئله خوش ارائه [3] هست یا نه.

درحل عددی معادلات باید علاوه براینکه دقت شود که پاسخهای بدست آمده از دقت لازم برخوردار بوده و روش عددی دارای جواب پایدار باشد، لازم است نتایج حاصل، اصول بقای جرم، ممنتم و انرژی را نیز دربرداشته باشد. درغیراینصورت نتایج فاقد ارزش فیزیکی است. روش حل عددی پیشنهادی زیر بر چنین اساسی ارائه میگردد.

معادلات دیفرانسیل (۱۵) و (۱۶) از نوع مختلط بوده و شامل هر دو نوع معادلات پارابولیک و الپیتیک میباشد. لذا لازم است روش حل معادلات هر دو روش پارابولیک و الپیتیک را شامل باشد. معادلات مذکور را برای سادگی به فرم زیر مینویسیم :

1.Grid point, 2.Energy spectrum, 3.Well-posed problem,

استقلالاً .

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{H}_i \qquad (۲۱)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (۲۲)$$

که در آن H_i شامل عبارات جابجائی ممنتم وتنش برش SGS است . مشکل اصلی این است که معادلات (۲۱) شامل مشتق نسبت به زمان می‌باشد ، در حالیکه معادله (۲۲) چنین نیست ولذا حل همزمان آنها با اشکال روبرو می‌شود . یک روش این است که از دو معادله زیر بجای آنها استفاده شود :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial x_i} \qquad (۲۳)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{H}_i \qquad (۲۴)$$

رابطه (۲۳) از مشتق گیری رابطه (۲۱) وبا استفاده از رابطه (۲۲) بدست آمده است. در روابط فوق $\bar{H}_i$ فقط تابعی از مشتقات سرعت نسبت به مکان است . با داشتن میدان سرعت در هر لحظه می‌توان $\bar{H}_i$ را محاسبه نموده و با استفاده از رابطه الیپتیک وغیرهمگن (۲۳)، $\bar{p}$ را محاسبه نمود وسپس با داشتن میدان سرعت و $\bar{p}$ دریک لحظه ، میدان سرعت درلحظه بعدی را با استفاده از رابطه پارابولتیک (۲۴) حساب کرد .

روش های متعددی برای حل معادلات (۲۳) و (۲۴) وجود دارد . خواننده می‌تواند به مراجع [۵]، [۶]، [۱۶]، [۱۹] مراجعه نماید . یک روش موفق ونسبتاً ساده که نویسنده مورداستفاده قرارداده است ، استفاده ازسری فوریه منقطع می‌باشد . این روش برای مسائلی که در آن جریان همگن بوده ودرنتیجه بتوان از شرایط مرزی پریودیک استفاده نمود ، مورد استفاده قرار میگیرد . درچنین روشی که موءلف درمرجع [۱۶] بکار گرفته است ، از رابطهٔ :

$$f(x_j) = \sum_{m=1}^{N} e^{ik_m x_j} \hat{f}(K_m) \;,\; K_m = \frac{2\pi m}{N\Delta X} \;,\; i = \sqrt{-1} \qquad (۲۵)$$

وتابع معکوس فوریه آن :

$$\hat{f}(k_m) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{-ik_m x_j} f(x_j) \qquad (۲۶)$$

استفاده میشود. در این صورت مشتق تابع f برابر خواهد بود با :

$$\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j}=\sum_{m=1}^{N} ik_m \hat{f}(k_m)e^{ik_m x_j} \qquad (۲۷)$$

لذا با این روش مشتقات تابع براحتی قابل محاسبه است و کافی است تابع را در فضای فوریه در ik_m ضرب نموده و معکوس سری فوریه آنرا بدست آورد. لازم به توضیح است که جهت بدست آوردن سری فوریه تابع میتوان از الگوریتم FFT که روش سریع محاسبه سری فوریه را میدهد استفاده نمود. به این ترتیب مشتقات تابع نسبت به مکان بدست میآید. جهت محاسبه میدان جریان در زمان بعدی $(t+\Delta t)$ باید از روش حل عددی استفاده شود که خطای حاصل بیشتر از خطای حاصل از حل عددی مشتقات نسبت به مکان نباشد. ضمنا" جوابهای حاصل پایدار باشند. تجربه نشان میدهد که برای بدست آوردن دقت لازم در محاسبات، فاصله زمانی Δt در محدوده ای قرار میگیرد که میتوان با استفاده از روشهای صریح جوابهای پایداری نیز بدست آورد. لذا روشهای صریح برای حل مسئله در زمانهای بعدی کافی است. روشهای با خطاهای متناسب با Δt^2 مثل روش لیپ فراگ ویا آدامس بشفورس ویا روشهای با خطای متناسب با Δt^4 مثل روش رانگ کاتا برای این کار توصیه میشود.

۵ - بحث ونتیجه گیری

نویسنده امیدوار است این مقاله بتواند ضمن ارائه مروری مقدماتی وکلی بر روشهای حل عددی معادلات جریانهای مغشوش و معرفی روش پرقدرت ادیهای بزرگ، قدمی هرچندکوچک دربوجود آوردن زمینه های تحقیقاتی جریانهای مغشوش در ایران با استفاده از روشهای پیشرفته برداشته باشد. با توجه به مطالب ذکرشده در بخشهای قبلی، بطور کلی میتوان نتایج کلی زیر را درمورد روش ادیهای بزرگ بیان نمود :

الف : ایده اساسی روش ادیهای بزرگ بسیار موفق بوده ومخصوصا" میتواند بخوبی در رابطه با جریانهای همگن وبرشی آزاد مورد استفاده قرار گیرد. درمورد جریان نزدیک دیواره، وجود ادیهای ریز ومهم درنزدیکی دیواره سبب میشود که نتوان روش ادیهای

بزرگ را براحتی اعمال کرد. علی‌رغم این مسئله پیشرفت خوبی در این زمینه انجام شده و همچنان ادامه دارد.

ب : درحال حاضر روش ادیهای بزرگ جای خود را در زمره روشهای اساسی دربررسی جریانهای مغشوش بازنموده و توانسته است نتایج واطلاعات نسبتا "دقیقی درمورد پارامترهائی که اندازه‌گیری آنها از طریق آزمایش مشکل ویا غیرممکن است بدست دهد. لذا این روش قادر است مدلهای موجود اغتشاشات در معادلات جریان را ارزیابی نماید.

ج : با استفاده از روش ادیهای بزرگ، جریانهائی که ایجاد آن از نظر آزمایشگاهی مشکل است از قبیل، جریان مغشوش با دوران ویا جریان قابل تراکم مغشوش، را می‌توان ایجاد و مورد بررسی قرار داد.

د : با استفاده از نتایج حاصل از روش ادیهای بزرگ برای یک میدان جریان مشخص، می‌توان ساختمان جریان مغشوش را به تصویر کشید و از آن فیلم تهیه نمود. فیلمهای تهیه شده در این مورد که جریان مغشوش سیال را با استفاده از روش ادیهای بزرگ نشان می‌دهد، با نتایج حاصل از طریق آزمایش مشابه‌اند.

هـ : روش ادیهای بزرگ نیاز به کامپیوترهای بزرگ ودقت زیاد کامپیوتر دارد. هرچند برای جریانهای ساده (مثل جریان ایزوتروپیک) درظرف چند دقیقه می‌توان به نتیجه رسید، ولی برای جریانهای پیچیده‌تر نیاز به ساعتها وقت کامپیوتر دارد.

و : ساختمان ادیها درجریان سیال بستگی به عدد رینولدز دارد. لذا نمی‌توان از اصل تشابه دربدست آوردن نتایج حاصل از جریان با یک عدد رینولدز برای عدد رینولدز دیگر استفاده مود. ازطرفی در اعداد رینولدز بالاتر، بعلت وسیعتر شدن محدوده اندازه ادیها، ابعاد مسئله بزرگتر شده ونیاز به وقت کامپیوتر دارد. همچنین مدلهای موجود برای SGS درجریانهای با رینولدز پائین ترصادق است ولازم است مدلهای بهتری برای

جریان با اعداد رینولدز بالا بدست آورد.

درموردکارهائی که درآینده دررابطه با روش ادیهای بزرگ بایستی انجام شودمسیرهای متعددی وجوددارد. درحال حاضرگروههای متعددی روی این موضوع کار می‌کنندوتعدادآنها روبه‌فزونی است. لذا انتظار می‌رودموضوع درآینده با رشدبیشتری دنبال گردد. البته پیش بینی آینده مشکل می‌باشد. ولی انتظار می‌روددرآینده نزدیک کارهای زیرانجام پذیرد:

الف : تاکنون روش ادیهای بزرگ برای برخی ازجریانهای ساده نظیرجریان ایزوتروپیک ، جریانهای همگن ، جریان با دوران وجریان درکانال مستقیم ،موردبررسی قرارگرفته است. لازم است روش مذکوربرای جریانهای پیچیده‌ترنیزمورداستفاده قرارگیرد. این جریانهاعبارتنداز:جریان جت آزاد، اختلاف دوجریان موازی،جریان با هندسه‌پیچیده‌ترونیزاثرتراکم پذیری وانتقال حرارت ویاانتقال جرم (مخلوط شدن دویاچند ماده)درجریانهای مطالعه‌شده‌قبلی.

ب : کاربیشتری روی جریان نزدیک دیواره‌با استفاده‌ازشرائط مرزی مناسبتر.

ج : استفاده‌ازنتایج حاصل ازروش ادیهای بزرگ برای مشاهده جزئیات جریان ،مدل کردن اغتشاشات‌درجریان ونیزتست و ارزیابی مدل های قدیمی.

د : مدلهای موجودبرای SGS ضعیف بوده ولازم است‌کاروسیعی در این زمینه صورت‌گیرد.

هـ : با استفاده‌ازروش ادیهای بزرگ میتوان برخی ازپدیده‌های جریان رابررسی نمود. این پدیده‌هاعبارتندازبررسی صدا درجریان ، احتراق وغیره .

مراجع

1. Reynolds, O., "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the laws of resistance in parallel channels," Trans. Roy. Soc. London, Vol. 174, 1883.

2. White, F. M., Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, N. Y., 1974.

3. Kline, S. J., Morkovin M. V., Sovran, G., Cockrell D. J., "Computation of turbulent boundary layers" AFOSR-IFR-STANFORD CONFERENCE, VI 12, 1968.

4. Smagorinsky, J., "General circulation experiments with the primitive equations, I. The basic experiment," Mon. Wea. Rev., pp 91, 99, 1983.

5. Deardorff, J. W., "A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number," J. Fluid Mech., 41, pp 425-480, 1970.

6. Schumann, U., "Results of a numerical simulation of turbulent channel flows," in Int'l. Meeting on Reactor Heat Transfer(M. Dalle-Donne, ed.), pp230-251, 1973.

7. Grotzbach, G., Direct Numerical Simulation of Secondary Currents in Turblent Channel Flows, Lect. Notes in phys ., 76, pp 308-319, Springer Verlag 1978.

8. Kwak, D., "3-D time dependent computation of turbulent flows, " ph. D. Dissertation, M. W. Dept., Stanford Univ., 1975

9. Shaunan, S., "Numerical simulation of turbulence in the presence of shear, " Ph. D. Dissertation, M. E. Dept., Stanford Univ., 1975.

10.Mansour, N. N., Moin, p., Reynolds, W. C., Ferziger J. H., "Improved methods for large eddy simulation of turbulence, "proc. Symp. on Turbulent Shear Flows, Penn. State Univ., 1977.

11.Cain, A. B., Reynolds, W. C. Ferziger, J. H. "Simulation of the transition and early turbulence regions of a mixing layer," Report TF-14, M. E. Dept., Stanford Univ., Stanford, CA., 1981.

12.Moin, P., Reynolds, W. C. Ferziger, J. H. "Large eddy simulation of an incompressible turbulent channel flow, "Report TF-12, M. E. Dept Stanford, CA., 1978.

13.Clark, R. A. Ferziger J. H. Reynolds, W. C. "Evaluation of subgrid scale turbulence Models using a fully simulated turbulent flow," J. Fluid . 91, 92, 1979 .

14.Mcmillan, O. J., Ferziger J. H., "Direct testing of subgrid scale models, "AIAA Journal, 17, 1340, 1979.

15.Bardina, J., Ferziger, J. H. Reynolds, W. C. " Improved subgred scale models for large eddy simultion," AIAA paper 80-1357, 1980.

16.Shirani, E., "Mixing of a passive scalar in istropic and sheared homogeneous turbulence," Ph. D. Dissertation, M. E. Dept., Stanford Rniv., 1981.

17.Leslie, D. C., Quarini, G. L. "The Application of turbulence theory to the formulation of subgrid modeling procedures," J. Fluid Mech., 91, 65, 1970.

18.Leonard, A.,"Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows," Adv. in geophysics, 18A, 237, 1974.

19.Antonopoulos-Domis, M., "Large eddy simulation of the decay of a passive scalar in isotropic turbulenc," J. Fluid Mech., 104, 55. 1981.

20.Brighan, E. O., <u>The Fast Fourier Transform</u>, prentice - Hall Inc., New Jersey, 1974.