حل جریان پتانسیل تراکم ناپذیر سه بعدی درمجاری با مقاطع مستطیلی

محمدسعیدسعیدی* ـ عباس مشیری**

نشریه تحقیقاتی فنی ـ مهندسی استقلال، دانشگاه صنعتی اصفهان، شماره ۹ اسفند ۶۹

خلاصه

مسئلهٔ جریان پتانسیل تراکم ناپذیر سه بعدی درمجاری با مقطع مستطیلی با متد اختلاف محدود به دو روش حل شده است. درروش اول از یک شبکهٔ متعامد استفاده شده ودرروش دوم از یک شبکهٔ منطبق بر بدنه بهره گرفته شده ومسئله درفضای انتقال یافته که درآن شبکه به یک شبکهٔ متعامد تبدیل شده، حل شده است. مقایسهٔ نتایج نشان می دهند که روش دوم ازدقت بیشتری برخوردار بوده و جهت طراحی نازلهای با مقاطع مستطیلی مناسبتر است.

۱ ـ مقدمه

جهت طراحی نازل ها مورل[1] [۱] یک روش سیستماتیک ارائه داده استکه بر مبنای حل جریان پتانسیل تقارن محوری درنازلهای با مقاطع دایره‌ای استوار است. وی برای طراحی نازلهای با مقاطع مربعی ازهمین نتایج وبا تعریف یک قطر معادل استفاده کرده است. متأسفانهاستفاده ازاین نتایج برای نازل هائی با مقطع مستطیلی بدلیل حضور جریانهای ثانویه، باخطا همراه خواهد بود. قاعدتاً" برای اینگونه نازلها باید جریان پتانسیل سه بعدی را حل کرده سپس با استفاده از نتایج آن، روش مورل رااعمال کرد.

---

* استادیار دانشکدهٔ مکانیک ـ دانشگاه صنعتی اصفهان

** فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ـ دانشکدهٔ مکانیک ـ دانشگاه صنعتی اصفهان

1. Morel

جریان پتانسیل تراکم ناپذیر در این نوع از نازلها توسط داوین[1] وهمکاران [۲] با استفاده از یک شبکهٔ متعامد در مختصات دکارتی حل شده است. در این روش بدلیل اینکه تعداد گره‌های هر مقطع با کوچکتر شدن سطح مقطع کم می شود، جهت حصول دقت کافی باید شبکه‌ای با تعداد زیادی گره بکار برد. جیمسون[2] [۳] روشی جهت حل جریان خارجی با استفاده از یک شبکهٔ منطبق بر بدنه ارائه داده است. در این روش دستگاه مختصات دکارتی توسط یک انتقال موضعی به دستگاه جدیدی انتقال پیدا می کند که در آن هر سلول حجم معیار به شکل یک مکعب در می آید. این روش چنانچه بر جریان داخل نازل اعمال شود، بنظر می رسد نقص روش داوین را نداشته ولی زمان محاسباتی بیشتری نیاز داشته باشد.

پاسخ به این سئوال که جهت طراحی نازل کدام روش از دقت بیشتری برخوردار بوده ومناسبتر است، هدف این مقاله قرار گرفت. برای این منظور، مسئلهٔ جریان پتانسیل تراکم ناپذیر درداخل نازلهای با مقطع مستطیل شکل توسط هر دو روش با متد اختلاف محدود حل شد.

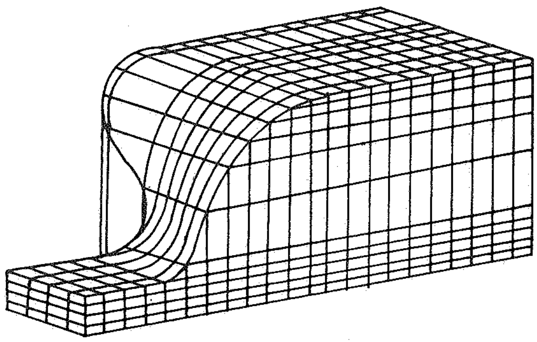
۲- حل جریان پتانسیل با استفاده ازشبکهٔ متعامد در دستگاه دکارتی

شبکهٔ انتخابی درشکل (۱) نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می شود شبکه به گونه‌ای ساخته شده که محل تلاقی خطوط شبکه با جداره‌ها را گره‌ها تشکیل می دهند. جهت سهولت، فاصلهٔ بین گره‌ها در امتداد جریان یکسان درنظر گرفته شده وهمچنین بدلیل وجود دو صفحهٔ تقارن در امتداد جریان، مسئله برای یک چهارم کانال حل شده است. با سطوح تقارن مانند سطوح صلب برخورد شده است.

---

1. Dowine

2. Jameson



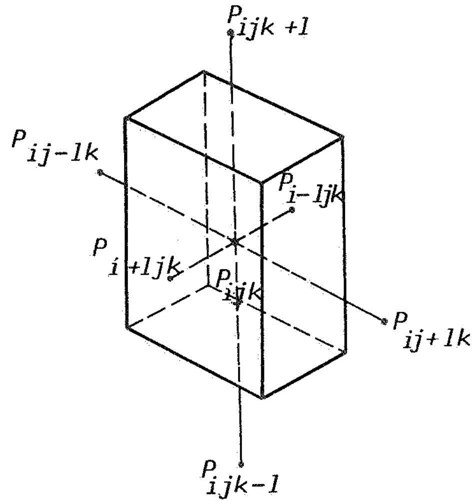
شکل ۱ ــ شبکهٔ انتخابی

درورودی وخروجی ، دوکانال باسطح مقطع یکنواخت به نازل اضافه شده است . وجوداین دوقسمت باعث می شودکه اعمال شرایط مرزی پتانسیل سرعت یکنواخت درمقاطع ورودی وخروجی نتوانندتاثیری درجریان داخل نازل واردسازند . حول هرگره یک سلول درنظرگرفته وبقاء جرم را برای این حجم معیار اعمال می کنیم . جریان پتانسیل وتراکم ناپذیرفرض شده وباجایگزینی $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$ وبا استفاده ازتفاوت محدودمرکزی برای مشتق های پتانسیل سرعت ، ϕ ، بقاء جرم منجربه معادلهٔ کلی زیرمی شود [۴] :

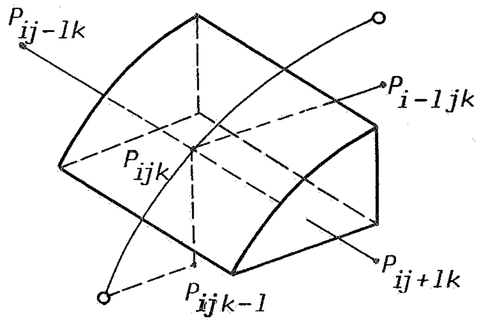
$$a_1\phi_{i-1jk} + a_2\phi_{i+1jk} + a_3\phi_{ij-1k} + a_4\phi_{ij+1k} + a_5\phi_{ijk-1} + a_6\phi_{ijk+1} + a_7\phi_{ijk} = 0 \qquad (1)$$

ضرایب a_1 تا a_7 ضرایب هندسی هستندکه با معلوم بودن مختصات گره‌ها قابل محاسبه هستند . درمجموع ۳۴ نوع نقطه دراین مسئله قابل

تشخیص است که‌هریک بیان ریاضی متفاوتی برای a_1 تا a_7 دارند .
درشکلهای (۲و۳) حجم معیار انتخابی به‌ترتیب برای یک گره



شکل ۲ـ حجم معیارگره‌داخلی



شکل ۳ـ حجم معیارگره‌مرزی

داخلی ویک گره‌مرزی نشان داده‌شده‌است .

دراعمال بقاء جرم برای گره‌های مرزی ، دبی عبوری از سطوح طلب مساوی صفرمنظورشده‌است . درمقطع ورودی همهٔ ϕ ها مساوی صفرودرمقطع خروجی مساوی یک انتخاب‌شده‌اند . که‌معادل عبوریک دبی جرمی مشخص ازنازل است .

۳ـ حل جریان پتانسیل با استفاده‌ازشبکهٔ منطبق بربدنه

ضعف شبکهٔ روش قبل دراین است که‌باکوچکترشدن سطح مقطع تعدادگره‌ها نیزکاهش می یابد . واین درحالی است که‌گرادیان پتانسیل سرعت افزایش می یابدولذاباعث‌پائین‌آمدن‌دقت‌روش

می شود . بعلاوه مورب بودن مؤلفه‌های سرعت نسبت به سطوح جداره مزید بر علت می شود . همچنین بدلیل اینکه درمراحل بعدی‌بررسی، امکان ایجاد شوک درجریان گذرا درداخل نازل مورد نظراست ، روشی انتخاب شد که بسادگی بتواند این قابلیت را پیدا کند : لذا علاوه بر استفاده از شبکهٔ منطبق بر بدنه ، دستگاه‌ثابت(xyz) با انتقال موضعی به دستگاه ($\xi\eta\zeta$) تبدیل شد . درشکل (۴)یک مقطع طولی ازشبکه نشان داده شده است . شبکه بگونه‌ای ساخته شده که اندازهٔ اضلاع هریک از سلولهای شبکه بهم نزدیک باشند .

۱ـ ۳ـ روش انتقال

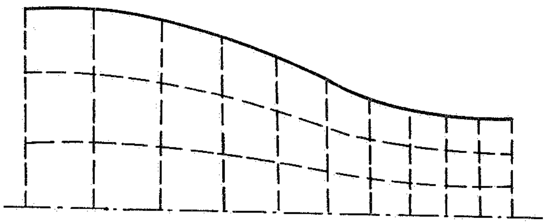
باانتخاب توابع انتقال به صورت زیر، هرسلول ijk دردستگاه xyz به یک مکعب به ضلع واحد دردستگاه $\xi\eta\zeta$ تبدیل می شود. در شکل (۵) تبدیل یافتهٔ شکل (۴) آورده شده است .

$$x=\sum_{i=1}^{8} N_i x_i \quad , \quad y=\sum_{i=1}^{8} N_i y_i \quad , \quad z=\sum_{i=1}^{8} N_i z_i \tag{۲}$$

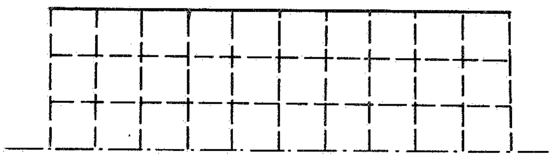
که درآن

$$N_i = \left(\frac{1}{2} \pm \xi\right)\left(\frac{1}{2} \pm \eta\right)\left(\frac{1}{2} \pm \zeta\right) \quad ,i= 1/\ldots/8$$

$$-\frac{1}{2} \le \xi \le \frac{1}{2} \quad , -\frac{1}{2} \le \eta \le \frac{1}{2} \quad , -\frac{1}{2} \le \zeta \le \frac{1}{2} \tag{۳}$$



شکل ۴ـ شبکه در دستگاه xyz



شکل ۵ـ شبکهٔ تبدیل یافته

با این انتخاب، هر راس از سلول ijk بریکی از رئوس مکعب و مرکز حجم سلول بر مرکز مکعب ($\xi=\eta=\zeta=0$) منطبق می شود.

از معادلات انتقال (۲)، ماتریس ژاکوبین، H، برای هر سلول بدست می‌آید:

$$H = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

که در آن بعنوان نمونه مشتق های x برحسب مختصات رئوس سلول ijk بصورت زیر محاسبه می شوند:

$$x_\xi = (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - x_8)/4$$

$$x_\eta = (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8)/4 \qquad (۵)$$

$$x_\zeta = (-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)/4$$

شکل بقائی معادلهٔ پیوستگی درا ثر انتقال حفظ می شـــود. . اگر w ، v و u معرف موٴلفه های میدان سرعت در دستگاه xyz و U، V ، W معرف سرعتهای غیرهمنواخت در دستگاه $\xi\eta\zeta$ (به ترتیب درامتداد محورهای $\zeta / \eta / \xi$) باشند ، داریم :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0 \qquad (۶)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho h U)+\frac{\partial}{\partial \eta}(\rho h V)+\frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho h W)=0 \qquad (۷)$$

که درآن h دترمینان ماتریس H بوده و V،U و W توسط رابطهٔ زیربیان می شوند :

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\eta \\ \phi_\zeta \end{bmatrix} \quad ; \quad G = [H^T H]^{-1} \qquad (۸)$$

ازآنجاکه دراین مقاله جریان پتانسیل تراکم ناپذیرموردنظراست، ازاین مرحله به بعد ρ را درمعادلات واردنمی سازیم. با فـــرض تغییرات خطی برای ϕ وسرعتهای غیرهمنواخت درداخل سلول داریم:

$$\phi = \sum_{i=1}^{8} N_i \, \phi_i \qquad (۹)$$

$$hU = \sum_{i=1}^{8} N_i (hU)_i \; , \; hV = \sum_{i=1}^{8} N_i (hV)_i \; , \qquad (۱۰)$$

$$hW = \sum_{i=1}^{8} N_i (hW)_i$$

که درآن منظور از ϕ_i مقدار ϕ درراءس i ام مکعب ijk استو همینطور برای مقادیری مثل $(hu)_i$،بدین ترتیب می توان مشتقهای hu ، hv و hw نسبت به متغیرهای ξ ، η و ζ راازروابطی مشابه روابط (۵) بدست آورده ودرمعادلهٔ (۷) جایگزین ساخت . بعنوان نمونه :

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(hU)\right]_{ijk} = 0.25\Big[(hU)_{i-\frac{1}{2}\,j+\frac{1}{2}\,k-\frac{1}{2}} -(hU)_{i-\frac{1}{2}\,j-\frac{1}{2}\,k-\frac{1}{2}}$$

$$+(hU)_{i+\frac{1}{2}\,j+\frac{1}{2}\,k-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$-(hU)_{i+\frac{1}{2}\,j-\frac{1}{2}\,k-\frac{1}{2}} +(hU)_{i-\frac{1}{2}\,j+\frac{1}{2}\,k+\frac{1}{2}} -(hU)_{i-\frac{1}{2}\,j-\frac{1}{2}\,k+\frac{1}{2}}$$

$$+(hU)_{i+\frac{1}{2}\,j+\frac{1}{2}\,k+\frac{1}{2}} -(hU)_{i+\frac{1}{2}\,j-\frac{1}{2}\,k+\frac{1}{2}}\Big]$$

حال چنانچه درمعادلهٔ بدست آمده به جای U ، V و W مقادیرآنها را ازطریق رابطهٔ (۸) جایگزین کرده وسپس مشتقهای ϕ_ξ ، ϕ_η ، ϕ_ζ راازروابطی مشابه (۵) برحسب مقادیر ϕ_i قراردهیم ، نهایتا"برای هرگره ijk به معادله‌ای مانندرابطهٔ زیر می رسیم [۴] :

$$a_1\phi_{i-1j-1k-1} + a_2\phi_{i-1j+1k-1} + a_3\phi_{i+1j+1k-1} + a_4\phi_{i+1j-1k-1}$$

$$+a_5\phi_{i-1j-1k+1} + a_6\phi_{i-1j+1k+1}$$

$$+a_7\phi_{i+1j+1k+1} + a_8\phi_{i+1j-1k+1} + a_9\phi_{i-1j-1k} + a_{10}\phi_{i-1j+1k}$$

$$+a_{11}\phi_{i+1j+1k} + a_{12}\phi_{i+1j-1k} + a_{13}\phi_{i-1jk-1} + a_{14}\phi_{i-1jk+1}$$

$$+a_{15}\phi_{i+1jk-1} + a_{16}\phi_{i+1jk+1} + a_{17}\phi_{ij+1k-1} + a_{18}\phi_{ij+1k+1}$$

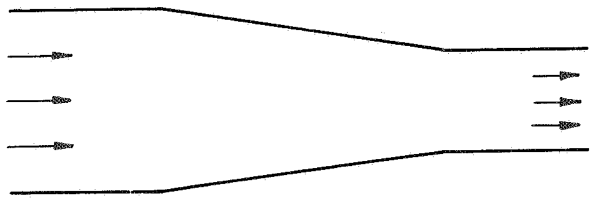
$$+a_{19}\phi_{ij-1k+1}+a_{20}\phi_{ij-1k-1}+a_{21}\phi_{i-1jk}+a_{22}\phi_{ij+1k}$$
$$+a_{23}\phi_{i+1jk}+a_{24}\phi_{ij-1k}+a_{25}\phi_{ijk+1}+a_{26}\phi_{ijk-1}$$
$$+a_{27}\phi_{ijk}=0 \qquad (۱۲)$$

دررابطهٔ فوق ضرایب a_1 تا a_{27} توابعی از h وعناصر G هستندکه نهایتاً " به مختصات رئوس شبکه مربوط می شوند .برای هرسلول باید ضرایب را ساخت . ملاحظه می شود مقدار پتانسیل سرعت درگره ijk ام که یک گره داخلی است به مقدار پتانسیل سرعت در ۲۶ گره اطراف خود مربوط می شود . این ۲۶ گره تمامی گره‌هائی هستندکه‌روی‌مکعبی به ضلع دو به مرکز ijk قرار دارند . بدین ترتیب دقت نتایج‌بیشتر شده وبعلاوه انتقال اطلاعات سریعتر وجامعترصورت می گیرد که خود موجب افزایش رشد همگرائی می شود .

درحل مسئله جمعاً " نه نوع گره قابل تشخیص است‌که برای هر نوع معادلهٔ اختلاف محدود به صورت رابطهٔ (۱۲) است ولیکن شکل توابع a_1 تا a_{27} متفاوت خواهند بود. درروی جداره‌ها دبی جرمی مساوی صفر قرارداده شد .

۴ ــ ارائه محاسبات ونتیجه گیری

چون هدف‌مقایسهٔ نتایج حاصل ازدوروش بود ، نازلی با هندسهٔ ساده مورد استفاده قرار گرفت . این نازل ازدوقسمت با مقطع‌ثابت در ورودی وخروجی ویک قسمت‌همگرا با شیب ثابت تشکیل شده است. درشکل شمارهٔ (۶) شمائی ازاین نازل درصفحهٔ قائم نشان داده‌شده است .



شکل ۶ ـ شمای نازل درصفحهٔ قائم

مجموعهٔ معادلات اختلاف محدود توسط روش گاوس - زایدل[1] حل شدند. نتایج حاصل ازحل روش شبکهٔ متعامد برای نازلی با نسبت سطح مقطع ورودی به خروجی ۴/۲ درشکل شمارهٔ (۷) آورده شده است. دراین مسئله تعداد گره‌های طولی ۱۴، شبکهٔ مقطع ورودی ۱۵×۱۷، شبکهٔ مقطع خروجی ۸×۱۰ وتولرانس همگرائی $\varepsilon = 10^{-5}$ انتخاب شدند. با انتخاب ضریب همگرائی مساوی ۱/۲۵، پس از ۸۰۰ بارسعی وخطا، جواب همگرا بدست آمد. اختلاف دبی جرمی ورودی وخروجی حدود ۳۰٪ شد ونشان می داد باید ازتعداد بیشتری گره استفاده شود. به‌منظور بالا بردن دقت این روش، توسط زیر برنامه‌ای درهرتکرار، پتانسیل سرعت جدید با فیدبک گرفتن ازنسبت دبی جرمی هرمقطع به دبی جرمی متوسط اصلاح شد وبدین ترتیب اختلاف فوق به ۷٪ تقلیل یافت.

درروش شبکهٔ منطبق بربدنه، بدلیل محدودیت حافظهٔ میکروکامپیوتر، شبکه‌ای با مقطع مربعی وحداکثر بهابعاد ۱۰×۵×۵ مورد استفاده قرار گرفت. برای نسبت تراکم ۱/۲ وتولرانس همگرائی 10^{-6} وضریب همگرائی مساوی ۰/۷، پس از ۵۹۸ تکرار جواب همگرا بدست آمدکه نتیجهٔ آن درشکل شمارهٔ (۸) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود. توزیع سرعت،یک مینیمم نسبی درورودی ویک ماکزیمم نسبی درخروجی قسمت همگرا رانشان می دهدکه یک روند

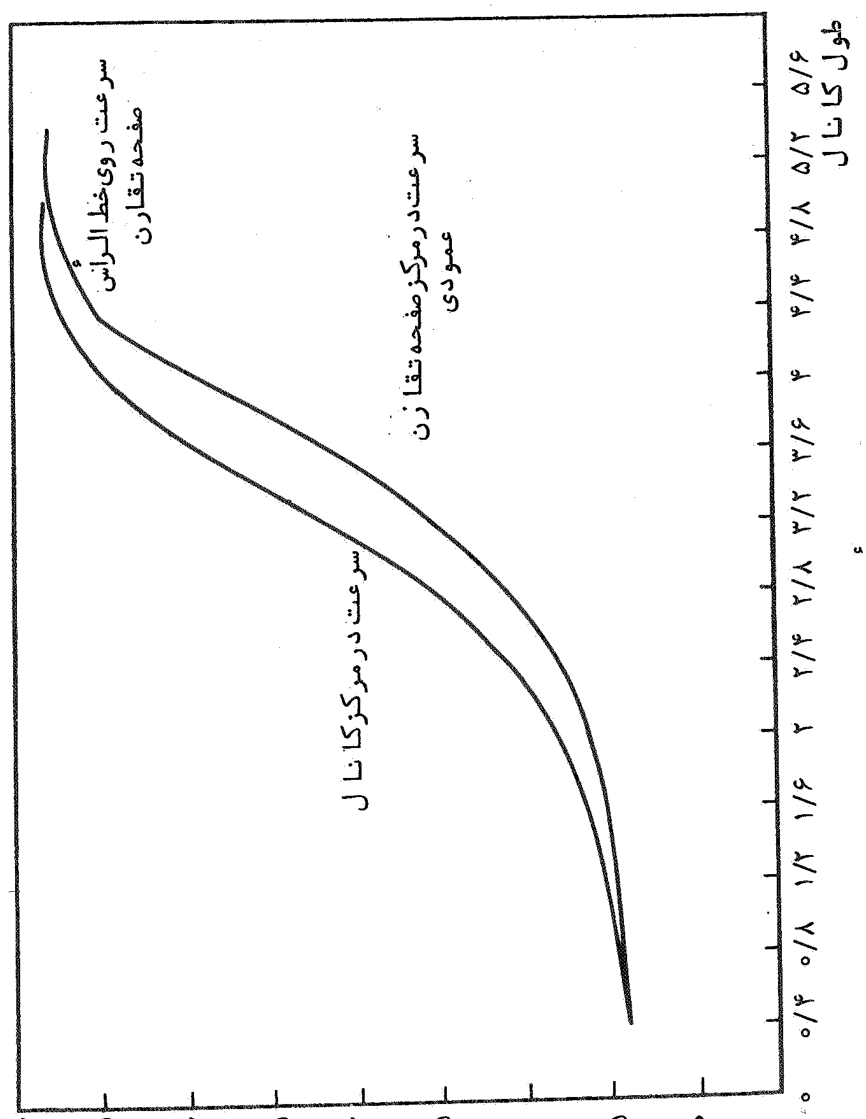
1. Gauss - Seidel

قابل انتظار بوده ومطابق با نتایج مراجع [۱] و [۲] است درصورتیکه چنین روندی درشکل (۷) مشاهده نمی شود . بعلاوه دراین حالت اختلاف دبی جرمی ورودی وخروجی نازل بدون اعمال زیربرنامهٔ اصلاح پتانسیل سرعت ۳% شد که نشان دهندهٔ دقت بالای این روش است .

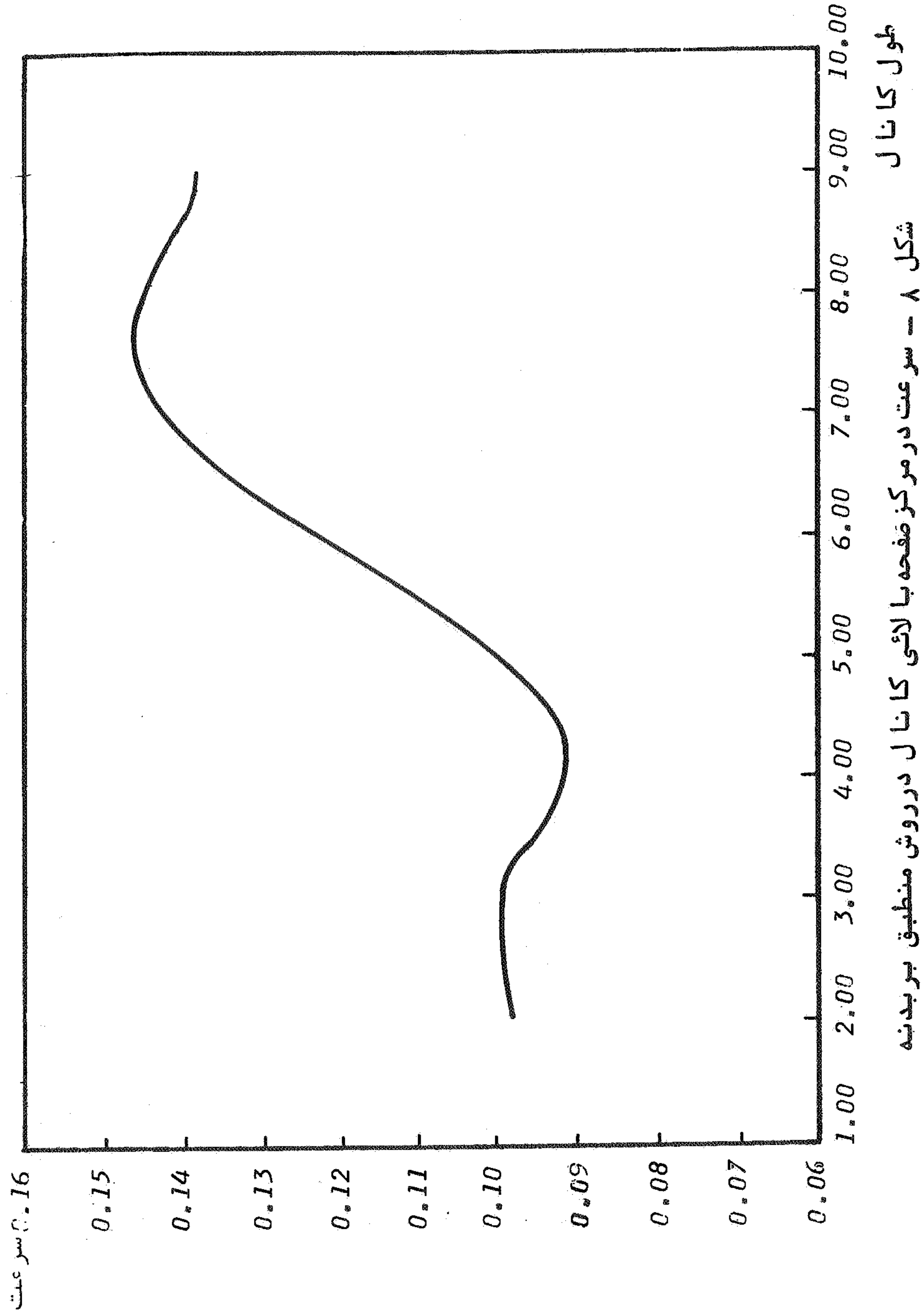
همین مسئله توسط روش شبکهٔ متعامد حل شدکه مشخصات آن درجدول شمارهٔ (۱) آورده شده است . پس از ۴۷۴ بارسعی وخطا جواب

جدول (۱)ـ مقایسه دوروش باهم

مقایسه دوروش	روش شبکه متعامد	روش شبکه منطبق بربدنه
نسبت سطح مقطع ورودی به خروجی	۱/۲۷	۱/۲۷
ضریب همگرائی	۱/۲۵	۰/۷
تعداد مقاطع طولی	۱۰	۱۰
تعداد گره‌ها درمقطع آخر درجهت x	۵	۵
تعداد گره‌ها درمقطع آخر درجهت y	۵	۵
تولرانس	10^{-6}	10^{-6}
تعداد نقاط شبکه	۴۴۱	۲۵۰



شکل ۷ — سرعت در خط الرأس و مرکز کانال در روش شبکهٔ متعامد



شکل ۸ — سرعت در مرکز صفحه بالائی کانال در روش منطبق بر بدنه

همگرا بدست‌آمد ولی بدلیل اینکه شبکه ازتعداد گره کافی برخوردار نبود ، نتایج بدست‌آمده روند معقولی را نشان نمی دادند. زمان اجرای برنامهٔ کامپیوتری برای هردوروش دریک حدود بود .

درمجموع مقایسهٔ اجراهای فوق نشان می دهد برای مسائل مشابه درعین حال که زمان اجرای برنامه برای هردو روش دریک حدوداست ولیکن روش دوم ازدقت بیشتری برخورداراست وچنانچه نازل توسط شبکه‌ای با تعداد گره‌های کافی معرفی شود ، می توان ازنتایج حاصله در طراحی نازلهای با مقطع مستطیلی سود جست .

مراجع

۴ـ مشیری ، عباس . حل جریان پتانسیل سه‌بعدی درمجاری مقطع مستطیلی شکل به‌روش عددی ، رساله‌کارشناسی ارشد- دانشکده مکانیک ، دانشگاه‌صنعتی اصفهان آبان ۱۳۶۸.

1. Morel , T., " Comprehensive Design of Axisymetric Wind Tunnel Contractions", Journal of Fluid Engineering, June 1975.

2. Dowine , J. J. and Jordinson ,R. and Barnes F. H., " On the Design of Three Dimensional Wind Tunnel Contractions", Aeronautical Journal, Aug/sept 1984.

3. Steinhoff , J. and Jameson , A., " Multiple Solutions of the Transonic Potential Flow Equation", AIAA Journal, November 1982.