

## \*\*\* مقاله آموزشی \*\*\*

گرامیان ها و تحقیقاتی با لانس شده و استفاده آنها در تقلیل درجه سیستمها

محمد علی معصوم نیا \*

### چکیده

در این مقاله آموزشی ، گرامیان های کنترل پذیری و مشاهده پذیری را مورد بررسی قرار داده ، روش محاسبه آنها را ذکر خواهیم کرد . سپس درباره تحقیقاتی با لانس شده و استفاده آنها در تقلیل درجه سیستمهای خطی ثابت با زمان ، توضیحاتی ارائه خواهیم کرد . در انتها ، حداکثر خطای تقلیل درجه در این روش را ذکر کرده و با استفاده از این کران بالادری باره چگونگی انتخاب درجه مناسب برای سیستم تقلیل یافته پیشنهاداتی ارائه می کنیم .

### مقدمه

یکی از روشهایی که بوفورد در تجزیه و تحلیل سیستمهای دینامیکی پیچیده مورد استفاده قرار میگیرد ، تقریب رفتار آنها با مدلهای ساده تر و سیستمهای درجه پائین ترمی باشد . پرواضح است که بررسی رفتار یک سیستم پیچیده بمراتب مشکل تر از بررسی رفتار سیستم ساده شده معادل آن می باشد و با این دلیل تقلیل درجه همواره مورد توجه بوده است .

در این مقاله آموزشی ، یکی از مهمترین روشهای موجود برای تقلیل درجه سیستمهای خطی ثابت با زمان با بعد محدود را بر اساس استفاده از

تحقق های با لانس شده، مورد بررسی قرار خواهیم داد [۱]. از نظر کیفی می توان گفت که در این روش سعی می شود تا با انتخاب مناسب پاره های فضای حالت، هر یک از متغیرهای حالت سیستم را به همان اندازه ای که کنترل پذیر است، مشاهده پذیر سازیم و سپس با حذف متغیرهای حالتی که کنترل پذیری و مشاهده پذیری آنها کم است، تعداد متغیرهای حالت را تقلیل داده و در نتیجه بعد فضای حالت و درجه معادلات حالت بیان کننده رفتار سیستم را کاهش دهیم. برای تشخیص جزء کنترل پذیر و مشاهده پذیر فضای حالت، مفاهیم گرامین های<sup>۲</sup> کنترل پذیری و مشاهده پذیری را معرفی خواهیم کرد. آنگاه تاثیر تغییر پاره های فضای حالت را بر روی گرامین ها بررسی کرده و تحقق های با لانس شده را معرفی می کنیم. برای مقایسه تقریبهای مختلف یک سیستم احتیاج به تعریف فاصله<sup>۳</sup> دو سیستم از یکدیگر خواهیم داشت تا تقریبی را قابل قبول بدانیم که فاصله آن از سیستم مورد نظر در مقایسه با دیگر تقریبها تا حد امکان کمتر باشد. باین دلیل نرم (اندازه) یک سیستم خطی ثابت با زمان را تعریف می کنیم و سپس مراحل مختلف تقلیل درجه با استفاده از تحقق های با لانس شده را برخواهیم شمرد.

### گرامین ها

تحقق زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= C\underline{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

در اینجا  $x$  بردار حالت با بعد  $n$ ،  $u$  بردار ورودی با بعد  $m$  و  $y$  بردار خروجی با بعد  $l$  بوده و ماتریس‌های  $A$  و  $B$  و  $C$  نیز دارای ابعاد متناظری می‌باشند. برای این تحقق، گرامیان دسترس‌پذیری<sup>۱</sup> (کنترل‌پذیری) را بصورت زیر تعریف می‌کنند:

$$W_R(0, t_f) = \int_0^{t_f} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (2)$$

می‌توان نشان داد که این ماتریس برای هر زمان محدود  $t_f$  معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر جفت  $(A, B)$  دسترس‌پذیر (کنترل‌پذیر) باشد [۳]. حال اگر زمان  $t_f$  را به بینهایت میل دهیم و اگر تمام مقادیر ویژه<sup>۲</sup> ماتریس  $A$  در سمت چپ محور  $j\omega$  قرار داشته باشند ( $\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0, \forall i$ )، آنگاه ماتریس  $(0, \infty)$   $W_R \triangleq W_R(0, \infty)$  حل یکتای معادله<sup>۳</sup> لیا پونسف<sup>۴</sup>:

$$A W_R + W_R A^T + B B^T = 0 \quad (3)$$

خواهد بود. برای اثبات این مطلب، با استفاده از تعریف  $W_R$  در (۲) داریم [۳]:

$$\begin{aligned} & A \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} A^T d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{d\tau} [e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau}] d\tau = e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} \Big|_0^{\infty} \end{aligned} \quad (4)$$

بعلاوه چون تما می مقا دیرویزه<sup>۶</sup>  $A$  در سمت چپ محور  $j\omega$  قرار دارند، پس :

$$e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} \Big|_0^{\infty} = -BB^T \quad (5)$$

و  $w_1$  در (۳) صدق می کند. توجه کنید که حل معادله<sup>۶</sup> لیا پونف با فرض اینکه مقا دیرویزه<sup>۶</sup>  $A$  سمت چپ محور  $j\omega$  می باشند، یکتاست. چون اگر  $w_1$  و  $w_2$  دو جواب معادله (۳) باشند، آنگاه داریم :

$$A(w_1 - w_2) + (w_1 - w_2)A^T = 0 \quad (6)$$

پس :

$$\frac{d}{dt} [ e^{At} (w_1 - w_2) e^{A^T t} ] = 0 \quad (7)$$

بعبارت دیگر برای تمام زمانهای  $t$  تیرم داخل کرشه مقداری ثابتاست :

$$e^{At} (w_1 - w_2) e^{A^T t} = \text{Constant} \quad (8)$$

بخصوص رابطه<sup>۶</sup> (۸) برای  $t=0$  و  $t=\infty$  برقرار است و چون مقا دیرویزه<sup>۶</sup>  $A$  سمت چپ محور  $j\omega$  می باشند پس  $w_1 = w_2$  بوده و حل معادله<sup>۶</sup> (۳) یکتا خواهد بود. البته می توان نشان داد که در حالت کلی معادله<sup>۶</sup> ماتریسی :

$$FX + XG + C = 0 \quad (9)$$

یک جواب یکتا برای ماتریس مجهول  $X$  دارد اگر و فقط اگر ماتریسهای  $F$  و  $G$  فاقدمقا دیرویزه مشترک باشند [۴]. همینطورا گرداشته باشیم:

$$\operatorname{Re} [\lambda_i (F)] + \operatorname{Re} [\lambda_j (G)] < 0, \quad \forall i, j \quad (10)$$

آنگاه این جواب یکتا را می توان بصورت  $X = \int_0^{\infty} e^{Ft} C e^{Gt} dt$  نوشت [۲].

بعلاوه گرامیان دسترس پذیری ( $t_f$  و  $W_R(0, t_f)$  که در رابطه (۲) تعریف شده است برای هر زمان  $t_f$  حداقل مثبت نیمه معین می باشد چون داریم:

$$\underline{w}^T W_R(0, t_f) \underline{w} = \int_0^{t_f} \underline{z}^T(\tau) \underline{z}(\tau) d\tau > 0 \quad (11)$$

$$\underline{z}(\tau) = B^T e^{A^T \tau} \underline{w}$$

وچنانچه جفت ( $A$  و  $B$ ) دسترس پذیر باشد، آنگاه ماتریس  $W_R(0, t_f)$  برای تمام زمانهای  $t_f$  مثبت معین خواهد بود. بهمین منوال، گرامیان مشاهده پذیری را بصورت زیر تعریف می کنند:

$$W_O(0, t_f) = \int_0^{t_f} e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (12)$$

این ماتریس نیز برای تمام زمانهای  $t_f$  معکوس پذیر است، اگر و فقط اگر جفت ( $A$  و  $C$ ) مشاهده پذیر باشد. بعلاوه اگر زمان  $t_f$  را به بینهایت

### 1. Observability

میل دهیم و اگر تمام مقادیر ویژه<sup>۵</sup> ماتریس  $A$  در سمت چپ محور  $j\omega$  واقع باشند، آنگاه بسادگی می توان نشان داد که ماتریس  $W_0 \triangleq W_0(0, \infty)$  حل یکتای معادله<sup>۶</sup> لیا پونف :

$$A^T W_0 + W_0 A + C^T C = 0 \quad (13)$$

خواهد بود. چگونگی حل معادله<sup>۶</sup> لیا پونف در مرجع [۵] ارائه شده است با استفاده از برنامه<sup>۶</sup> MATLAB نیز می توان معادله<sup>۶</sup> لیا پونف را بسادگی حل نمود [۶].

در ادامه به تعبیر فیزیکی گرامیان ها خواهیم پرداخت. در ابتدا فرض کنید که بخواهیم حالت سیستم را از مرکز صفحه<sup>۶</sup> حالت ( $\underline{x} = \underline{0}$ ) در زمان  $t = -T$  به نقطه<sup>۶</sup>  $\underline{x} = \underline{x}_0$  در زمان  $t = 0$  هدایت نماییم بگونه ای که انرژی ورودی مینیمم شود. عبارت دیگری خواهیم مسئله<sup>۶</sup> بهینه سازی :

$$\text{minimize } J = \int_{-T}^0 \underline{u}^T(t) \underline{u}(t) dt \quad (14)$$

را با شرایط مرزی زیر حل کنیم :

$$\underline{x}(-T) = \underline{0}, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

البته رابطه<sup>۶</sup> بین ورودی و حالت نیز طبق معادله (۱) بوده و این رابطه حکم قید مسئله<sup>۶</sup> بهینه سازی را دارد. می توان نشان داد که ورودی بهینه  $\underline{u}^*(t)$  با فرض دسترس پذیری بصورت زیر بوده [۷]:

$$\underline{u}^*(t) = B^T e^{-A^T t} [W_T(0, T)]^{-1} \underline{x}_0 \quad (15)$$

مقدار تابع هزینه بهینه ( انرژی مینیم ) برای این ورودی بهینه بصورت

$$J^* = \underline{x}_0^T [W_T(0, T)^{-1}] \underline{x}_0 \quad (16)$$

می باشد. البته اگر  $T$  را به سمت بینهایت میل دهیم، با فرض اینکه مقدار دیر ویژه<sup>۶</sup>  $A$  در سمت چپ محور  $j\omega$  واقع باشند، داریم :

$$J^* = \underline{x}_0^T W_T^{-1} \underline{x}_0 \quad (17)$$

توجه کنید که اگر  $\underline{x}_0$  در امتداد بردار ویژه<sup>۶</sup>  $W_T$  با مقدار ویژه<sup>۶</sup> " کوچک " قرار داشته باشد، آنگاه  $J^*$  " بزرگ " خواهد بود و در نتیجه دست یافتن به این حالت مستلزم استفاده از مقدار زیادی انرژی است. پس این قسمت از فضای حالت به سختی دسترس پذیر بوده و یا به عبارت دیگر دسترس پذیری آن کم است. پس نزدیک بودن  $W_T$  به تکیگی<sup>۱</sup> شما یا نگر نزدیک بودن جفت (  $A$  و  $B$  ) به دسترس نا پذیری است.

به همین ترتیب می توان تعبیری دیگر برای گرا میان مشاهده پذیری ارائه کرد. تحقق (۱) را در نظر گرفته و فرض کنید ورودی  $\underline{u}(t)$  برای  $t \geq 0$ ، صفر باشد، آنگاه واضح است که داریم :

$$\underline{y}(t) = C e^{At} \underline{x}_0, \quad t \geq 0 \quad (18)$$

که در اینجا  $\underline{x}_0$  حالت اولیه می باشد. انرژی خروجی نیز بصورت زیر است :

$$E^* = \int_0^T \underline{y}^T(t) \underline{y}(t) dt = \underline{x}_0^T W_0(0, T) \underline{x}_0 \quad (19)$$

### 1. Singularity

همینطور اگر  $T$  را به سمت بینهایت میل دهیم ، با فرض پایداری (۱) ، خواهیم داشت :

$$E^* = \begin{bmatrix} x_0^T & \\ -0 & W_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ -0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

حال اگر  $x_0$  در جهت بردار ویژه  $W_0$  متناظر با مقدار ویژه " کوچک " باشد ، آنگاه انرژی خروجی  $E^*$  " کوچک " خواهد بود و بعبارت دیگر اثر این شرایط اولیه در خروجی کم مشاهده خواهد شد و انرژی خروجی به سختی می توان  $x_0$  را محاسبه نمود . پس جزئی از فضای حالت که متناظر با این مقدار ویژه " کوچک " می باشد به سختی مشاهده پذیر می باشد و نزدیک بودن  $W_0$  به تکینگی نما یا نگر نزدیک بودن جفت (  $E$  و  $A$  ) به مشاهده ناپذیری است . در ریاضیات گرام میان بردارهای  $w_1, \dots, w_n$  را دترمینان ماتریس گرام  $G$  (Gram Matrix) با فرم زیر تعریف می کنند :

$$G = \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \dots & \langle w_1, w_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle w_n, w_1 \rangle & \dots & \langle w_n, w_n \rangle \end{bmatrix} \quad (21)$$

$\langle w_i, w_j \rangle$  نمایانگر ضرب داخلی دو بردار  $w_i$  و  $w_j$  است . می توان نشان داد که دترمینان  $G$  صفر است اگر و فقط اگر بردارهای  $w_1, \dots, w_n$  وابسته خطی باشند . اگرچه بردارهای  $w_1, \dots, w_n$  می توانند متعلق به هرفضای برداری باشند ، در مسئله<sup>۶</sup> مشاهده پذیر می خواهیم استقلال



خطی ستونهای  $Ce^{At}$  را بررسی کنیم و درحقیقت گرا میان مشاهده پذیری همان ماتریس گرام مربوط به ستونهای مختلف  $Ce^{At}$  می باشد. در این حالت  $W_i$  ستون  $i$ ام ماتریس  $Ce^{At}$  است.

تا شیرپایه های فضای برداری برگرا میان ها

در این قسمت نشان خواهیم داد که با انتخاب صحیح پایه های فضای برداری میتوان گرا میان های دسترس پذیری و مشاهده پذیری را قطری و برابر یکدیگر نمود. برای این منظور متغیر حالت جدید  $\underline{z}$  را بر حسب متغیر حالت  $\underline{x}$  بصورت زیر تعریف کنید:

$$\underline{x} = T\underline{z} \quad (22)$$

با جایگزینی (22) در (1) داریم:

$$\dot{\underline{z}} = T^{-1}AT\underline{z} + T^{-1}B\underline{u} = \hat{A}\underline{z} + \hat{B}\underline{u} \quad (23)$$

$$\underline{y} = CT\underline{z} = \hat{C}\underline{z}$$

حال اگر گرا میان های دسترس پذیری و مشاهده پذیری تحقق (23) را با  $\hat{W}_O$  و  $\hat{W}_T$  نمایش دهیم، آنگاه، با فرض وقوع مقادیر ویژه  $A$  در سمت چپ محور  $j\omega$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{W}_T &= \int_0^{\infty} e^{\hat{A}\tau} \hat{B} \hat{B}^T e^{\hat{A}^T \tau} d\tau \\ &= T^{-1} \left( \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \right) (T^T)^{-1} \quad (24) \\ &= T^{-1} W_T T^{-T} \end{aligned}$$

بطریق مشابه می‌توان نشان داد:

$$\hat{W}_O = T^T W_O T \quad (25)$$

با توجه به (۲۴) و (۲۵)، واضح است که با انتخاب  $T$  مناسب می‌توان خواص ماتریسهای  $\hat{W}_O$  و  $\hat{W}_F$  را بصورت قابل ملاحظه‌ای تغییر داد و حتی مقادیر ویژه  $\hat{W}_O$  و  $\hat{W}_F$  را نیز عوض نمود.

نکته جالبی که باید به آن توجه داشت این است که اگرچه مقادیر ویژه  $\hat{W}_O$  و  $\hat{W}_F$  لزوماً یکسان نمی‌باشند ولی مقادیر ویژه  $\hat{W}_O$  و  $\hat{W}_F$  همانند مقادیر ویژه  $W_O$  و  $W_F$  هستند و با تغییر پایه‌های فضای برداری عوض نمی‌شوند، زیرا دو ماتریس  $\hat{W}_O$  و  $\hat{W}_F$  متشابه‌ای می‌باشند:

$$\hat{W}_F \hat{W}_O = T^{-1} W_F T^{-T} T^T W_O T = T^{-1} W_F W_O T \quad (26)$$

عموماً "به جذر مقادیر ویژه" ماتریس  $W_F W_O$ ، مقادیر استثنائی هنکل<sup>۲</sup> [۸] یا مودهای درجه دوم [۱] گفته می‌شود. از آنجا که برای هر دو ماتریس دلخواه  $M$  و  $N$  با ابعاد مناسب، مقادیر ویژه غیر صفر ماتریسهای  $MN$  و  $NM$  با یکدیگر برابرند، مقادیر استثنائی هنکل، جذر مقادیر ویژه  $W_O W_F$  نیز می‌باشند. بعلاوه چون تمامی تحقق‌های مینیمال (هم دسترس پذیر و هم مشاهده پذیر) یک تابع تبدیل بوسیله تبدیل (۲۳) با یکدیگر در ارتباط می‌باشند [۳]، حاصل ضرب گرامیان‌های مشاهده پذیر و دسترس پذیر این تحقق‌ها متشابه خواهند بود. بنابراین مقادیر استثنائی

هنکل به تحقق بخصوص بستگی نداشته و به این علت به مقادیر استثنائی  
 هنکل تابع تبدیل نیز معروفند و آنها را با  $\sigma_i$  نمایش داده و بصورت نزولی  
 مرتب می کنند:

$$\sigma_i [G(S)] \triangleq \lambda_i^{\frac{1}{2}} (W_T W_O), i = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

در اینجا  $(F)$   $\lambda_i$  نمایانگر  $i$  امین مقدار ویژه<sup>۶</sup> ماتریس  $F$  است. عموماً  
 $\sigma_i$  ها را در ماتریس قطری  $\Sigma$  بصورت زیر قرار می دهند:

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

در ادامه نشان خواهیم داد که می توان ماتریس  $T$  را بگونه ای انتخاب  
 کرد تا:

$$\hat{W}_T = \hat{W}_O = \Sigma \quad (29)$$

به تحقق  $(\hat{C}, \hat{B}, \hat{A})$  که در آن گرمیان های دسترس پذیری و مشاهده پذیری  
 هر دو قطری و با یکدیگر برابر باشند، تحقق بالانس شده می گویند [۱]، چون  
 بطور کیفی در این تحقق هر یک از متغیرهای حالت به یک اندازه دسترس  
 پذیر و مشاهده پذیر می باشد.

چون  $W_T$  مثبت معین ( $W_T > 0$ ) و همینطور متقارن می باشد، می توان یک  
 سری بردارهای ویژه<sup>۶</sup> متعامد برای آن پیدا کرد. پس ماتریس متعامد  
 $V_T$  وجود خواهد داشت بطوریکه [۹]:

$$V_F^T W_F V_F = \Lambda_F^2 \quad (۳۰)$$

در اینجا  $\Lambda_F$  یک ماتریس قطری با المانهای مثبت می باشد. حال ماتریس متقارن و مثبت معین  $P$  را بصورت زیر تعریف کنید:

$$P = (V_F \Lambda_F)^T W_O (V_F \Lambda_F) \quad (۳۱)$$

نکته جالب این است که مقادیر ویژه  $P$  همان مقادیر ویژه  $W_O$  می باشند چون داریم:

$$\begin{aligned} \lambda_i(P) &= \lambda_i (V_F \Lambda_F \Lambda_F^T V_F^T W_O) \\ &= \lambda_i (W_O) = \sigma_i^2 \end{aligned} \quad (۳۲)$$

اگر ماتریس مودال  $P$  را  $U$  بنامیم، آنگاه:

$$U^T P U = \Sigma^2 = U^T (V_F \Lambda_F)^T W_O (V_F \Lambda_F U) \quad (۳۳)$$

خواهد شد. حال اگر طرفین رابطه (۳۳) را از راست و از چپ در  $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$  ضرب کنیم:

$$\Sigma = \Sigma^{-\frac{1}{2}} (V_F \Lambda_F U)^T W_O (V_F \Lambda_F U) \Sigma^{-\frac{1}{2}} \quad (۳۴)$$

با مقایسه (۳۴) و (۲۵) نتیجه می گیریم که با انتخاب:

$$T = V_F \Lambda_F U \Sigma^{-\frac{1}{2}} \quad (۳۵)$$

میتوان گرمایان مشاهده پذیری را قطری کرده و برابر  $\Sigma$  قرار داد. به عبارت دیگر  $\hat{W}_O = \Sigma$ . برای نشان دادن اینکه  $\hat{W}_F = \Sigma$  می باشد رابطه (۳۵) را در (۲۴) جایگزین می کنیم. پس از این عمل داریم:

$$\hat{W}_F = \Sigma^{\frac{1}{2}} U^T \Lambda_F^{-1} V_F^T W_F V_F \Lambda_F^{-1} U \Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma \quad (۳۶)$$

البته روشهای دیگری برای محاسبه ماتریس  $T$  وجود دارد که از نظر عددی خواص بسیار بهتری دارند و برای آشنائی با آنها مرجع [۹] مفید است. با استفاده از دستور *BALREAL* در برنامه *MATLAB* [۶] نیز می توان تحقق بالانس شده یک تحقق داده شده را محاسبه کرد. البته این دستور دارای اشکالاتی می باشد که تصحیح شده آن در ضمیمه آمده است. اگر ماتریس  $T$  را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$T = T_O \triangleq V_F \Lambda_F U \quad (۳۷)$$

بسادگی می توان نشان داد که  $\hat{W}_F = I$  و  $\hat{W}_O = \Sigma^2$  می شود. به این دستگاه مختصات بخصوص، نرمالیزه شده در ورودی<sup>۱</sup> گفته می شود و در آن تمامی متغیرهای حالت، به یک میزان دسترس پذیری باشند [۱]. همینطور اگر ماتریس  $T$  را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$T = T_I \triangleq V_F \Lambda_F U \Sigma^{-1} \quad (۳۸)$$

### 1. Input Normal

آنگاه  $\hat{W}_0 = I$  و  $\hat{W}_T = \Sigma^2$  خواهد شد. به این دستگاه مختصات بخصوص، نرمالیزه شده در خروجی<sup>۱</sup> گفته می شود و در آن تمام متغیرهای حالت به یک میزان مشاهده پذیر می باشند [۱].

البته مهمترین دستگاه مختصات برای تجزیه و تحلیل سیستمها همان دستگاه مختصات با لانس شده می باشد که در آن گرامیان های مشاهده پذیری و دسترس پذیری هر دو قطری و برا بر یکدیگر می باشند.

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که تبدیل  $T$  که در (۳۵) آمده است یکتا نمی باشد چون بطور مثال عنا صر هر یک از ستونهای  $V_T$  را می توان در  $\lambda$  ضرب کرد و ما تریس  $T$  به دست آمده با زهم تحقق داده شده را به یک تحقق با لانس شده تبدیل خواهد کرد. البته اگر  $\sigma_i$  ها غیر تکراری باشند، آنگاه تمام  $T$  های ممکن از ضرب کردن (۳۵) در یک ماتریس قطری با المانهای  $\lambda$  یا  $\lambda^{-1}$  بدست خواهند آمد ولی اگر بعضی از  $\sigma_i$  ها تکراری باشند، آنگاه بینهایت ماتریس  $T$  وجود خواهد داشت که یک تحقق داده شده را با لانس می کنند [۸].

### نرم یا اندازه یک سیستم

همانگونه که در مقدمه توضیح داده ایم، برای مقایسه تقریبهای مختلف یک سیستم به معیار اندازه گیری فاصله<sup>۲</sup> دو سیستم از یکدیگر داریم. بهمین منظور، ابتدا دو معیار متفاوت برای محاسبه اندازه (یا بزرگی) یک سیستم یا تابع تبدیل آن ارائه خواهیم کرد و سپس فاصله<sup>۲</sup> دو تابع تبدیل را بر اساس اندازه<sup>۲</sup> تفاضل آنها محاسبه خواهیم نمود. بر اساس مطالبی که تا کنون ذکر کرده ایم یک نرم (یا اندازه) رایج برای تابع تبدیل گویا، پایدار و اکیدا<sup>۳</sup> "سره"<sup>۴</sup>  $G(S)$ ، نرم هنکیل آن می باشد که آنرا با  $\|G(S)\|_H$  نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

---

1. Output Normal      2. Strictly Proper

گرا میان ها و تحقیقاتی با لانس شده و ...

۱۰۱

$$\|G(S)\|_H \stackrel{\Delta}{=} \sigma_1 \quad (39)$$

که در آن  $\sigma_1$  بزرگترین مقدار استثنائی هنکل  $G(S)$  است (تابع تبدیلی اکیدا " سره می باشد که برای آن داشته باشیم :

$$\lim_{S \rightarrow \infty} G(S) = 0 \quad (40)$$

$$S \rightarrow \infty$$

یا عبارت دیگر ورودی این سیستمها نباید مستقیماً " بر روی خروجی آنها اثر گذارد. می توان نشان داد که نرم هنکل  $G(S)$  را با رابطه زیر نیز می توان تعریف نمود [۸] :

$$\|G(S)\|_H = \sup_{\substack{\|u(t)\|_{L_2(-\infty, 0)} \\ \|y(t)\|_{L_2(0, \infty)}}} \frac{\|y(t)\|_{L_2(0, \infty)}}{\|u(t)\|_{L_2(-\infty, 0)}} \quad (41)$$

در اینجا  $\sup$  نمایانگر سوپرمم<sup>۱</sup> (یا ماکزیمم) می باشد و  $\int_{-T_1}^{T_2} \underline{x}^T(t) \underline{x}(t) dt$  نمایانگر تمام توابع  $\underline{x}(t)$  است که برای آنها محدود است. چون ورودی  $u(t)$  برای  $t \geq 0$ ، صفر فرض شده و در رابطه (۴۱)، خروجی  $y(t)$  فقط برای  $t > 0$  مورد نظر می باشد، پس  $y(t)$  فقط به حالت اولیه<sup>۰</sup> بستگی داشته و با استفاده از تعریف گرا میان دسترس پذیری در مسئله<sup>۰</sup> مینیمم انرژی خواهیم داشت :

### 1. Supremum

$$\|G(S)\|_H = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{(x_0^T W_0 x_0)^{\frac{1}{2}}}{(x_0^T W_r^{-1} x_0)^{\frac{1}{2}}} \quad (42)$$

همینطور اگر فاکتورکلسکی<sup>۲</sup> ما تریس<sup>۲</sup>  $W_r^{-1}$  را با  $L$  نمایش دهیم

$$L^T L = W_r^{-1} \quad (43)$$

$T$  نگاه خواهیم داشت :

$$\|G(S)\|_H = \sup_{x_0 \neq 0} \left[ \frac{x_0^T W_0 x_0}{x_0^T L^T L x_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

$$= \sup_{y_0 \neq 0} \left[ \frac{y_0^T L^{-T} W_0 L^{-1} y_0}{y_0^T y_0} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad y_0 \triangleq L x_0$$

$$= \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}} (L^{-T} W_0 L^{-1})$$

$$= \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}} (L^{-1} L^{-T} W_0) = \sigma_1$$

### 1. Cholesky



در اینجا  $\lambda_{max}(F)$  نمایانگر بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $F$  می‌باشد. البته تعریف نرم‌هنکل کمی غیرطبیعی بنظر می‌رسد ولی بسادگی می‌توان نشان داد که تمام خواص یک تابع نرم را دارا می‌باشد. در ادامه نرم دیگری را تعریف خواهیم کرد که مفهوم سیستمی بسیار واضحی داشته و از آن کرارا "استفاده خواهد شد".

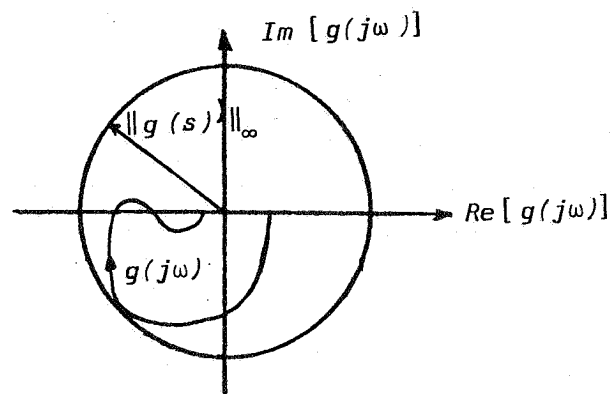
فرض کنید سیستم تک ورودی - تک خروجی پایداری با تابع تبدیل گویا و سوره  $g(s)$  داده شده باشد. نرم بینهایت  $g(s)$  را با  $\|g(s)\|_{\infty}$  نمایش داده و آنرا بصورت زیر تعریف می‌کنند [۱۰]:

$$\|g(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{s \in C_+} |g(s)| \quad (45)$$

در اینجا  $C_+$  نمایانگر تمام نقاط صفحه مختلط واقع در سمت راست یا روی محور  $j\omega$  است. چون  $g(s)$  در نقاط  $C_+$  تحلیلی می‌باشد، با استفاده از قضیه اصل حداکثر قدر مطلق<sup>۲</sup> [۱۱]، می‌دانیم که ما کمزیم  $|g(s)|$  برای  $s \in C_+$  بر روی محور  $j\omega$  اتفاق خواهد افتاد، یا بعبارت دیگر:

$$\|g(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega \in (-\infty, \infty)} |g(j\omega)| \quad (46)$$

و در حقیقت نرم بینهایت شعاع کوچکترین دایره‌ای است که دیاگرام نایکوئیست یک سیستم را در برمی‌گیرد (شکل ۱).



شکل ۱- دیاگرام نایکوئیست و نرم بینهایت یک سیستم نمونه

برای سیستمهای چندمتغیره که تمام قطبهای آنها در سمت چپ محور قرار داشته و سوسره میباشند، نرم بینهایت را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\|G(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{s \in C_+} \bar{\sigma}(G(s)) \quad (47)$$

که در آن نمایش  $\bar{\sigma}(F)$  بمعنای بزرگترین مقدار استثنائی ماتریس مختلط  $F$  بوده، و بصورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{\sigma}(F) = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(F^H F) \quad (48)$$

در اینجا  $H$  نمایانگر هر میشن<sup>۱</sup> یک ماتریس می باشد. برای هر مقدار مختلط  $s$ ، ماتریس  $G(s)$  یک ماتریس مختلط بوده،  $\bar{\sigma}(G(s))$  تابعی از متغیر مختلط  $s$  خواهد بود. می توان نشان داد که مقدار ماکزیمم  $\bar{\sigma}(G(s))$  برای  $s \in C_+$  بر روی محور  $\omega$  اتفاق می افتد [۳۱]، یا بعبارت دیگر:

$$\|G(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega \in (-\infty, \infty)} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (49)$$

حال که با مفهوم اندازه<sup>۲</sup> یک سیستم آشنا شده ایم، بسادگی می توان فاصله<sup>۳</sup> دو سیستم را از یکدیگر تعریف کرد. فرض کنید دو سیستم  $m$  ورودی و تک خروجی پایدار با توابع تبدیل  $G_1(s)$  و  $G_2(s)$  داده شده باشند، آنگاه تفاضل  $G_2(s) - G_1(s)$  نیز سیستمی پایدار خواهد بود می توان فاصله<sup>۴</sup> دو سیستم  $G_1(s)$  و  $G_2(s)$  را اندازه<sup>۵</sup> سیستم تفاضل  $G_2(s) - G_1(s)$  تعریف نمود. بطور مثال فاصله<sup>۶</sup> دو سیستم  $G_1(s)$  و  $G_2(s)$  بر حسب نرم بینهایت به صورت زیر است:

$$d(G_2(s), G_1(s)) \triangleq \|G_2(s) - G_1(s)\|_{\infty} \quad (50)$$

در قسمت بعد، از این معیار برای محاسبه<sup>۷</sup> فاصله<sup>۸</sup> یک سیستم و تقریب آن استفاده کرده، درباره<sup>۹</sup> چگونگی استفاده از تحقق های با لانس شده در تقلیل درجه<sup>۱۰</sup> سیستمها صحبت خواهیم کرد.

### 1. Hermition

تقلیل درجه بر اساس تحقق های با لانس شده

فرض کنید که سیستم  $m$  ورودی و تک خروجی خطی ثابت با زمان پایدار با تابع تبدیل اکیدا "سره"  $G(s)$  داده شده باشد و معادلات حالت (۱) تحقق مینماید و با لانس شده برای این سیستم باشد. (اگر تحقق مینماید را که در اختیار دارد با لانس نمی باشد با انتخاب پایه های جدید برای فضای حالت و ماتریس  $T$  (رابطه ۳۵)) معادلات حالت را با لانس نمائید). همینطور  $r$  مؤلفه اول بردار حالت را  $x_1$  و باقی مؤلفه های آنرا  $x_2$  نام گذاری کرده و معادلات حالت (۱) را بصورت زیر بازنویسی کنید:

$$\begin{array}{l} \text{سطر } r \\ \left[ \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_2 \end{array} \right] \\ \text{سطر } n-r \end{array} = \begin{array}{cc} \text{ستون } r & \text{ستون } n-r \\ \left[ \begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{21} & A_{22} & \vdots \end{array} \right] \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{array} + \begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \\ B_2 \end{array} \end{array} \underline{u} \quad (51)$$

$$\underline{y} = \begin{array}{cc} \text{ستون } r & \text{ستون } n-r \\ \left[ \begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \end{array} \right] \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{array} \end{array}$$

گرمیان های دسترس پذیری و مشاهده پذیری این تحقق را که با یکدیگر برابر و مساوی  $\Sigma$  می باشد، مطابق بردار حالت بصورت زیر تفکیک می کنیم:

$$\Sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ستون } r & \text{ستون } n-r \\ \hline \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{سطر } r \\ \text{سطر } n-r \end{array} \end{array} \quad (52)$$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \quad , \quad \Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$$

نکتهء جالب این است که اگر جزء  $x_2$  از بردار حالت را بکلی حذف کرده و تحقق :

$$\dot{\underline{z}} = A_{11} \underline{z} + B_1 \underline{u} \quad (53)$$

$$\underline{y} = C_1 \underline{z}$$

را در نظر بگیریم ، آنگاه این تحقق بالانس شده بوده و گرامیان مشاهده پذیری و دسترس پذیری آن هردو  $\Sigma_1$  خواهد بود. این رابطه را می توان بسادگی با جایگزینی (51) و (52) در معادلات لیا پونف (31 و 13) نتیجه گرفت. همینطور اگر  $\sigma_r > \sigma_{r+1}$  باشد، آنگاه تمامی مقادیر ویژهء  $A_{11}$  در سمت چپ محور  $z$  قرار دارند [8]، یعنی :

$$\text{Re} [\lambda_i(A_{11})] < 0 \quad , \quad i = 1, \dots, r \quad (54)$$

بعبارت دیگر تحقق (53) خود نیز یابا ر مجانبی خواهد بود و بعلاوه این تحقق هم دسترس پذیر و هم مشاهده پذیر است. نکتهء بسیار جالب دیگر این است که فاصلهء دو تحقق (53) و (51) همواره درنا مساوی زیر

صدق می کند [۸].

$$\begin{aligned} \|C(sI-A)^{-1} B - C_1 (sI-A_{11})^{-1} B_1\|_{\infty} &\leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n) \\ &= 2\text{trace}(\Sigma_2) \end{aligned} \quad (55)$$

پس اگر مقدار  $2\text{trace}(\Sigma_2)$  درست راست رابطه (۵۵) کوچک باشد، آنگاه تحقق (۵۳) با درجه  $r$  تقریب خوبی برای تحقق (۵۱) با درجه  $n$  خواهد بود. همینطور در [۸] نشان داده شده است که تمام تقریب های درجه  $r$  ممکن برای (۵۱) حداقل خطایی برابر  $\sigma_{r+1}$  خواهند داشت یا بعبارت دیگر:

$$\|C(sI-A)^{-1} B - H(s)\|_{\infty} \geq \sigma_{r+1} \quad (56)$$

که در اینجا  $H(s)$ ، هر تابع تبدیل سره پایدار داده شده با درجه  $r$  مک میلان است. عموماً "در رابطه" (۵۶) تساوی برقرار نمی باشد و مقدار خطا عموماً "بمرا تبا از  $\sigma_{r+1}$  بیشتر است [۸]. حال از مقایسه  $\sigma_{r+1}$  و  $2\text{trace}(\Sigma_2)$  می توان نتیجه گرفت که خطای تقلیل مرتبه با استفاده از تحقق بالانس شده تا چه حد قابل قبول است.

کرانی که برای خطا در (۵۵) مشخص شده، مطلق است. در بعضی مواقع، محاسبه نسبت خطا به کمیت تقریب زده شده مطلوب می باشد. بعبارت دیگر می خواهیم نسبت:

$$\frac{\|C(sI-A)^{-1} B - C_1 (sI-A_{11})^{-1} B_1\|_{\infty}}{\|C(sI-A)^{-1} B\|_{\infty}} \quad (57)$$

را محاسبه کرده و یا کرانی برای آن پیدا کنیم. خوشبختانه اینکار بسادگی قابل انجام است و می توان نشان داد که برای تابع تبدیلی پایدار  $G(s)$ ، نرم هنکل هیچگاه از نرم بینهایت بزرگتر نبوده و نرم بینهایت نیز از دو برابر مجموع مقادیر استثنائی هنکل بزرگتر نمی باشد [۴]:

$$\|C(sI-A)^{-1}B\|_H = \sigma_1 \leq \|C(sI-A)^{-1}B\|_\infty \leq 2\text{trace}(\Sigma) \quad (58)$$

با استفاده از (۵۸) و (۵۵):

$$\frac{\|C(sI-A)^{-1}B - C_1(sI-A_{11})^{-1}B_1\|_\infty}{\|C(sI-A)^{-1}B\|_\infty} \leq \frac{2\text{trace}(\Sigma_2)}{\sigma_1} \quad (59)$$

توجه کنید که روابط (۵۵)، (۵۶) و (۵۹) می توانند در انتخاب درجه<sup>۶</sup>  $r$  مناسب برای تقلیل درجه<sup>۶</sup> سیستم مورد استفاده قرار گیرند. در ابتدای کار عموماً "درجه تقریبی سیستم مورد نظر معلوم نمی باشد ولی با توجه به (۵۶) تمامی تقریب های درجه<sup>۶</sup>  $r$ ، حداقل خطایی برابر  $\sigma_{r+1}$  خواهند داشت و  $r$  را باید گونه ای انتخاب کنیم تا سمت راست روابط (۵۵) و (۵۹) مقادیری کوچک اختیار کنند. البته در بعضی موارد تمام  $\sigma_i$  ها بقدری به یکدیگر نزدیک می باشند که تقریب سیستم با یک سیستم درجه<sup>۶</sup> پایین تر همواره خطای قابل ملاحظه ای پدید خواهد آورد.

اگر تابع تبدیل مورد نظر پایدار و سره بوده ولی اکیدا " سره نباشد، آنگاه تحقق آن دارای جزء مستقیم ورودی و بطور مثال بصورت زیر خواهد بود:

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \quad (60)$$

$$\underline{y} = C \underline{x} + D \underline{u} \rightarrow \text{جزء مستقیم}$$

در اینجا نیز می توان از روشی که شرح آن رفت استفاده کرد. برای این منظور کافی است که جزء اکیدا " سره تحقق یعنی  $B^{-1}(sI-A)C$  را با  $B^{-1}(sI-A)C$  تقریب زده و سپس جزء مستقیم را به حاصل اضافه نمود. بعبارت دیگر تقریب درجه  $n$  سیستم (به صورت  $C_1(sI-A_{11})^{-1}B_1+D$ ) می باشد.

در مرجع [۱۲] روش بسیار مناسبی برای محاسبهء تحقق که لزوماً با لانس شده نمی باشد ولی تابع تبدیلی برابر تحقق تقلیل یافته (۵۳) دلمرد، ارائه شده است. این روش دارای خواص بسیار خوب عددی بوده و در مسائل پیچیده با درجه بالا می تواند مورد استفاده قرار گیرد. در ادامه برای روشن شدن مطالب و چگونگی استفاده از تحقق با لانس شده در تقلیل درجه به ذکر یک مثال خواهیم پرداخت.

### مثال

در این مثال با استفاده از تحقق های با لانس شده، تقریب مناسبی برای تابع تبدیل پایدار

$$g(s) = \frac{200(s+2)(s+0.8)}{(s+0.9)(s+4)(s^2+6s+50)} \quad (61)$$

بدست خواهیم آورد. یک تحقق دسترس پذیر و مشاهده پذیر برای  $g(s)$  به صورت زیر است:



(۶۲)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -10.9 & -83 & -266.6 & -180 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 200 & 560 & 320 \end{bmatrix} \underline{x}$$

با استفاده از دستور *BALREAL* در برنامه *MATLAB* [۶]، یک ماتریس *T* با لانس کننده برای این تحقق به فرم

$$T = \begin{bmatrix} 0.0394 & -0.1754 & 0.1963 & 0.0609 \\ 0.0156 & 0.0005 & -0.0222 & -0.0243 \\ 0.0006 & 0.0041 & 0.0023 & 0.0184 \\ -0.0004 & 0.0007 & 0.0035 & -0.0178 \end{bmatrix} \quad (۶۳)$$

و تحقق با لانس شده مربوطه بصورت زیر خواهد بود:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} -1.9095 & -6.7590 & 2.6865 & 0.2615 \\ 6.7590 & -2.1290 & 2.6964 & 0.3634 \\ -2.6865 & 2.6964 & -5.6044 & -1.1782 \\ -0.2615 & 0.3634 & -1.1782 & -1.2571 \end{bmatrix} \underline{z} + \begin{bmatrix} 3.3122 \\ -2.6064 \\ 2.0314 \\ 0.2252 \end{bmatrix} u \quad (۶۴)$$

$$y = \begin{bmatrix} 3.3122 & 2.6064 & -2.0314 & -0.2252 \end{bmatrix} z$$

گرا میان های دسترس پذیری و مشا هده پذیری این تحقق نیز بصورت زیر می باشند :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.8726 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5954 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3681 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0202 \end{bmatrix} \quad (65)$$

با توجه به (۵۸) ، نرم بینهایت  $g(s)$  از ۹.۷۱۲۶ بیشتر نبوده و از ۲.۸۷۲۶ نیز کمتر نخواهد بود. دیاگرام بردار اندازه  $g(j\omega)$  در شکل (۲) رسم شده است و این مقادیر با استفاده از این دیاگرام قابل تأیید است ، زیرا داریم :

$$\|g(j\omega)\|_{\infty} \approx 4.5309 \quad (66)$$

همینطور با توجه به المان های قطراصلی  $\Sigma$  میدانیم که حداقل خطای ممکن در تقریب  $g(s)$  با یک سیستم درجه سوم برابر  $\sigma_4 = 0.0202$  ، و با یک سیستم درجه دوم برابر  $\sigma_3 = 0.3681$  است. البته با توجه به  $\Sigma$  تمام تقریب های درجه اول ممکن برای  $g(s)$  خطای قابل ملاحظه ای (اقل) ۱.۵۹۵۴) بوجود آورده و قابل قبول نخواهند بود.

با توجه به تحقق با لانس شده (۶۴) ، یک تقریب درجه سوم قابل قبول با حذف متغیر حالت چهارم بدست خواهد آمد که تابع تبدیل آن بصورت :

(۶۷)

$$g_3(s) = \frac{0.05073 (s+1.6709)(s+3912.0)}{(s+3.6072)(s^2+6.0356s+50.5575)}$$

می باشد. دیاگرام برداندازه  $g_3(j\omega)$  و اندازه خطای  $g(j\omega)-g_3(j\omega)$  در شکل (۲) رسم شده اند و واضح است که در محدوده فرکانسی نمایش داده شده،  $g_3(s)$  تقریب بسیار خوبی برای  $g(s)$  است. با استفاده از (۵۵) داریم:

$$\|g(s)-g_3(s)\|_{\infty} \leq 0.0404 \quad (۶۸)$$

و با توجه به شکل ۲ نرم بینهایت خطا به حد بالای ۰.۰۴۰۴ بسیار نزدیک می باشد.

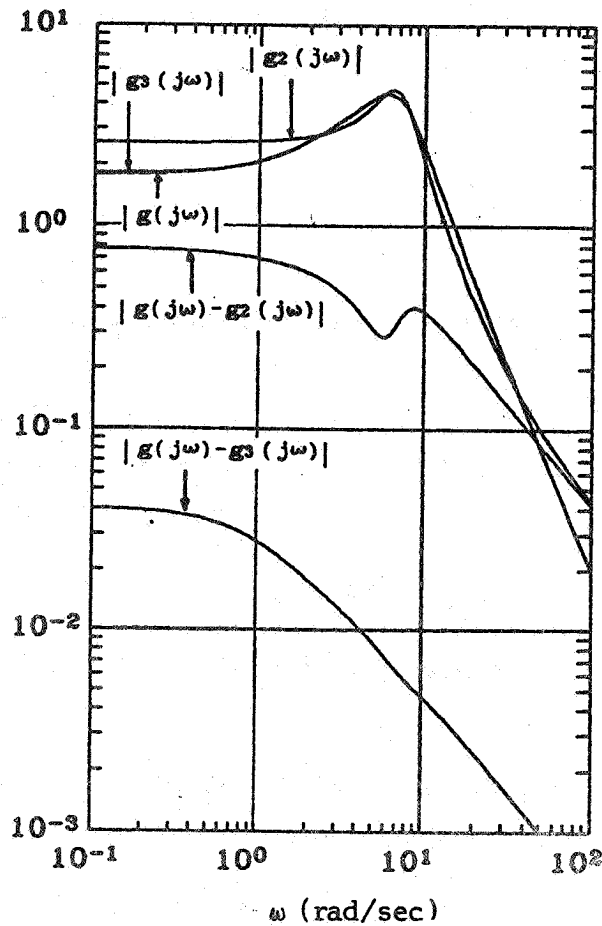
همینطور اگر متغیرهای حالت سوم و چهارم تحقق (۶۴) را حذف کنیم، آنگاه تحقق یک سیستم درجه دوم بدست آمده و تابع تبدیل آن نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$g_2(s) = \frac{4.1772(s+30.423)}{s^2+4.0385s+49.7496} \quad (۶۹)$$

دیاگرام برداندازه  $g_2(j\omega)$  و اندازه خطای  $g(j\omega)-g_2(j\omega)$  نیز در شکل ۲ رسم شده اند و با استفاده از (۵۵) داریم:

$$\|g(s)-g_2(s)\|_{\infty} \leq 0.7766 \quad (۷۰)$$

با توجه به این شکل ، واضح است که نرم بینهایت خطا به حد بالای 0.7766 نزدیک می باشد و رابطه (۵۵) بخوبی اندازه خطا را پیش بینی کرده است . در این مسئله بنظر می رسد که  $g_3(s)$  یک تقریب مناسب برای  $g(s)$  است ، در حالیکه تقریب  $g(s)$  با  $g_2(s)$  خطای به مراتب بیشتری دارد . البته با توجه به مقادیر قطرا اصلی  $\Sigma$  این مطلب از ابتدا قابل پیش بینی بود .



شکل (۲) - پاسخ فرکانسی  $g(s)$  و تقریب های آن

البته تقلیل درجه با استفاده از تحقق های با لانس شده فقط یکی از روشهای نوین موجود است و روشهای متعددی دیگری برای این منظور وجود دارند. بطور نمونه یک سیستم پایدار و سوره  $G(s)$  با درجه  $n$  را در نظر بگیرید، آنگاه برای تقریب  $G(s)$  با یک سیستم درجه  $r$  پایدار می توان مسئله بهینه سازی زیر را حل نمود:

$$\text{minimize } \|G(s) - \hat{G}(s)\|_{\infty} \quad (71)$$

$(r = \hat{G}(s) \text{ درجه})$   
 $\hat{G}(s)$

البته حل این مسئله مشکل می باشد [۱۳] و روش تقلیل درجه ای که در اینجا ارائه شده در حقیقت یک حل تقریبی (*Suboptimal*) برای مسئله ذکر شده است. نکته مهم دیگری که باید به آن توجه کنیم، تفاوت اهمیت خطا در فرکانس های مختلف می باشد. عموماً "خطاهایی که در فرکانسهای پایین در طی تقلیل درجه بوجود می آیند بسیار مهمتر از خطاهای فرکانس بالا می باشند. برای در نظر گرفتن اهمیت فرکانسهای مختلف می توان وزنه فرکانسی مناسبی به صورت  $W(s)$  انتخاب کرد که دارای اندازه ای بزرگ در فرکانسهای پایین و اندازه ای کوچک در فرکانسهای بالا باشد و سپس مسئله بهینه سازی زیر را حل نمود [۱۳]:

$$\text{minimize } \| (G(s) - \hat{G}(s)) W(s) \|_{\infty} \quad (72)$$

$(r = \hat{G}(s) \text{ درجه})$   
 $\hat{G}(s)$

در تقلیل درجه با استفاده از تحقق های با لانس شده نیز می توان وزنه های فرکانسی مناسبی را در نظر گرفت. برای آشنایی با این روش

می توانید به مرجع [۱۳] مراجعه کنید. مزیت استفاده از تحقق های بالانس شده، سادگی نسبی انجام محاسبات در بدست آوردن سیستم درجه پائین تر سی باشد و به این دلیل بوفور مورد استفاده قرار می گیرد.

البته روش دیگری که اخیراً " با موفقیت بسیار روبرو بوده است، نقلیل درجه با استفاده از نرم هنکل می باشد. در این روش برای یک سیستم پایدار و اکیدا " سره  $G(s)$  با درجه  $n$  می خواهیم سیستم پایدار  $\hat{G}(s)$  با درجه  $r$  را بگونه ای پیدا کنیم تا تابع هزینه زیر کمینه شود:

$$J = \|G(s) - \hat{G}(s)\|_H \quad (72)$$

گلاورا این مسئله را بصورت کامل حل کرده است و نشان داده است که مقدار مینیمم تابع هزینه (۷۳) برابر  $\sigma_{r+1}$  است [۸]. توجه کنید که نرم استفاده شده در (۷۳) نرم هنکل بوده و نرم بینهایت نمی باشد. بعلاوه گلاور نشان داده است که برای تقریب بهینه هنکل  $G(s)$ ، می توان ماتریس ثابت  $D$  را بگونه ای یافت که:

$$\|G(s) - (G(s) + D)\|_\infty \leq \sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n \quad (74)$$

با توجه به این رابطه، تقریب هنکل عموماً " خطای کمتری از تقریب حاصل از تحقق های بالانس شده دارد. البته توجه کنید که در اینجا تقریب  $G(s)$  بصورت  $\hat{G}(s) + D$  می باشد که لزوماً " اکیدا " سره نخواهد بود در حالیکه در تقلیل درجه با استفاده از تحقق های بالانس شده اگر سیستم اکیدا " سره باشد، آنگاه تقریب آن نیز اکیدا " سره خواهد بود. بعلاوه مرا حل محاسبات تقریب هنکل بمراتب پیچیده تر از تقریب بر اساس تحقق های بالانس شده می باشد.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله آموزشی، یکی از روشهای بسیار رایج و موفق در تقلیل درجه سیستمهای خطی ثابت با زمان را که بر اساس تحقق‌های با لانس شده استوار است، به تفصیل مورد بررسی قرار داده و مزایای آن را بر شمردیم.

در سرتاسر این مقاله تنها درباره تقلیل درجه سیستمهای پایدار صحبت کردیم. البته می‌توان یک سیستم ناپایدار داده شده را به دو جزء پایدار  $G_p(s)$  و کاملاً ناپایدار  $G_u(s)$  تفکیک کرده، سپس با استفاده از روشهای ارائه شده جزء پایدار  $G_p(s)$  را با یک سیستم درجه پایین‌تر تقریب زده و حاصل را به  $G_u(s)$  اضافه کنیم. البته در روشهای دیگر [۱۴]، سیستم داده شده را بصورت کسر دو سیستم پایدار نوشته (این عمل همواره امکان پذیر است) و سپس این دو سیستم پایدار را با یکی از روشهای مطرح شده در اینجا تقلیل درجه می‌دهند و سپس تقریب‌هایی را بدست می‌آورند. یکی از کاربردهای اساسی تقلیل درجه در طراحی کنترل‌کننده‌های با درجه پایین است چون کنترل‌کننده‌هایی که با استفاده از روشهای نوین طراحی می‌شوند عموماً "درجه‌ای برابر با درجه سیستم تحت کنترل خود داشته و نسبتاً پیچیده می‌باشند. با استفاده از روشهای تقلیل می‌توان این کنترل‌کننده‌ها را با یک کنترل‌کننده درجه پایین مناسب تقریب زد. در مرجع [۱۳] روشهای مختلفی برای تقلیل درجه کنترل‌کننده مورد بررسی قرار گرفته است. البته در تقلیل درجه کنترل‌کننده باید به نکات بسیار مهمی از قبیل پایداری سیستم حلقه بسته که ممکن است در طی تقریب کنترل‌کننده از دست برود توجه خاصی داشته و بویژه بر روی استفاده از وزنه‌های فرکانسی مناسب در طی مراحل تقلیل درجه تأکید داشت.

## ضمیمه

در دستور *BALREAL* در برنامه *MATLAB* [۶]، مقادیر استثنائی هنگامی که بصورت نزولی مرتب نشده و در نتیجه عمل تقلیل درجه از روی تحقق محاسبه شده به سهولت انجام نمی پذیرد. بعلاوه بخاطر گرد شدن اعداد در طی انجام محاسبات، ماتریس هایی که از نظر تئوری متقارن می باشند، در طی محاسبات تقارن خود را از دست داده و در نتیجه ممکنست مقادیر ویژه محاسبه شده  $T^T$  آنها مختلط شوند. برای پرهیز از این مسائل، این دستور به صورت زیر تصحیح شده است. البته برای محاسبه تحقق های بالانس شده و تقلیل درجه با استفاده از آنها برای سیستمهای درجه بالا بهتر است از الگوریتم های پیشنهادی [۹] و [۱۲] استفاده شود.

```
function [ab,bb,cb,m,T] = balreal(a,b,c)
% BALREAL Balanced state-space realization and model reduction.
% [Ab,Bb,Cb] = BALREAL(A,B,C) returns a balanced state-space
% realization of the system (A,B,C).
% [Ab,Bb,Cb,m,T] = BALREAL(A,B,C) also returns a vector m
% containing the diagonal of the gramian of the balanced
% realization, and matrix T, the similarity transformation
% used to convert (A,B,C) to (Ab,Bb,Cb). If the system (A,B,C)
% is normalized properly, small elements in gramian m indicate
% states that can be removed to reduce the model to lower order.

%      J.N. Little 3-6-86
%      Copyright (c) 1986 by the MathWorks, Inc.

Gc = gram(a,b); % Compute the reachability gramian
Go = gram(a',c'); % Compute the observability gramian
R = chol(Gc);
RGR = R*Go*R';
RGR = tril(RGR) + tril(RGR,-1)'; % Make RGR exactly symmetric.
[V,D] = eig(RGR);
m=diag(real(D)).^(.5);
T = R'*V*diag(m.^(-.5));
[m index]=sort(-m); % Sort the diagonal elements of the gramian
m=-m;
T=T(:,index);
ab = T\A*T; % Compute the balanced realization
bb = T\b;
cb = c*T;
```



مراجع

1. Moore, B., "Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction", *IEEE TAC*, Vol. 26, No. 1, pp. 17-31, Feb 1981.
2. Luenberger, D., Introduction to Dynamic Systems, Wiley, 1979.
3. Kailath, T., Linear Systems, Prentice-Hall, 1980.
4. Gontmacher, Matrix Theory, Vol. I, Chelsea, 1977.
5. Hammarling, "Numerical Solution of the Stable, Non-negative Definite Lyapunov Equation", *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 2, pp. 303-323, 1982.
6. MATLAB Software, The MATHWORKS Inc., 21 Elliot Street, South Natick, MA 01760, U.S.A.
7. Luenberger, D., Optimization by Vector Space Methods, Wiley, 1969.
8. Glover, K., "All Optimal Hankel-Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and Their  $L_\infty$  Error Bounds", *International Journal of Control*, Vol. 39, No. 6, pp. 1115-1193, 1984.

9. Laub A., et.al, " *Computation of Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms*", *IEEE TAC*, Vol.32, pp.115-122, 1987.
10. Vidyasagar, *Control System Synthesis*, M.I.T. Press, 1985.
11. Paliouras, *Complex Variables for Scientists and Engineers*, Macmillan, 1975.
12. M. Safanov and Chiang, " *A Schur Method for Balanced-Truncation Model Reduction*", *IEEE TAC*, Vol.34, No.7, July 1989, pp. 729-733
13. Anderson and Liu, " *Controller Reduction: Concepts and Approaches*", *IEEE TAC*, Aug 1989, Vol.34, No. 8, pp. 802 -812
14. Mcfarlane et.al. " *Reduced-Order Controller Design Using Coprime Factor Model Reduction*", *IEEE TAC* , March 1990 , Vol. 3, No. 3 , pp. 369 - 373