حل عددی جابه‌جایی طبیعی در یک کانال عمودی

علی‌اصغررستمی* و محمدرضا خسروی**
دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۴/۱۲/۲۱ - دریافت‌نسخهٔ‌نهایی: ۱۳۷۵/۴/۳

چکیده *-کانالهای عمودی در صنایع انرژی خورشیدی به عنوان جمع کنندهٔ انرژی خورشیدی و به طور وسیع درکامپیوترها و ترانزیستورها برای سرمایش قطعات الکترونیکی استفاده می‌شوند. دراین کانالها به علت اختلاف دمایی که بین سیال و سطح وجود دارد جابه‌جایی طبیعی درکانال ایجاد می‌شود. بررسی جریان دراین کانالها از نظر حرارتی به یک جریان دوبعدی جابه‌جایی طبیعی بین دو صفحهٔ موازی تبدیل می‌شود. دراین مقاله معادله‌های‌بقا برای جریان آرام دوبعدی دائم بین دو صفحهٔ موازی با شرط مرزی دمای سطح و شار حرارتی یکنواخت سطح حل شده است. تأثیر اعداد پرانتل وگراشف و نسبت طول به عرض مجرا روی دبی جریان و عدد نوسلت بررسی شد. نتایج حاصل برای عدد نوسلت موضعی دهانهٔ خروجی کانال با نتایج تجربی مقایسه شده و دقت آن قابل قبول به نظر می‌رسد.*

Numerical Solution of Natural Convection in a Vertical Channel.

Ali A. Rostami, and M. R. Khosravi
Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

ABSTRACT- ***Natural Convection between vertical parallel plates occurs frequently in applications such as solar collectors and cooling of electronic instruments. The problem is a two dimensional developing buoyant flow. In this work, the two dimensional conservation equations are solved numerically for constant wall temperature and constant wall heat flux. The results for the local Nusselt number at the duct exit are compared with the experimental data and the agreement is reasonable.***

۱- مقدمه

جریان طبیعی و اجباری و توأم در بین صفحات موازی به علت کاربردهایی که در صنعت دارند، به‌طور وسیع مورد مطالعه قرار می‌گیرند. به عنوان نمونه به چند کاربرد این نوع کانال اشاره می‌شود. این کانالها در صنایع انرژی خورشیدی کاربرد دارند. دراین صنایع از این صفحات به عنوان جمع کنندهٔ انرژی خورشیدی استفاده می‌شود. همچنین برای خنک کردن سیستمهای الکترونیکی مدرن (ترانزیستورها، کامپیوترها، ترانسفورماتورها) ازاین نوع کانال استفاده شود. بدین منظور قطعات الکترونیکی روی ورقه‌های مخصوصی نصب‌می‌شوند. سپس‌این‌صفحات درکنارهم و به صورت

---

* دانشیار ** مربی

فهرست علائم

a	عرض کانال
b	نصف‌عرض‌کانال
$C_f=\frac{\tau_w}{1/2\rho u_c^2}$	ضریب اصطکاک
f,F	توابع جریان بی‌بعد
$Gr=\frac{g\beta b^3(T_w-T_0)}{\nu^2}$	عددگراشف
$Gr=\frac{g\beta q'' b^4}{k\nu^2}$	عدد گراشف
$Gr^*=\frac{g\beta a^4(T_w-T_0)}{L\nu^2}$	عددگراشف (تغییر یافته)
k	ضریب هدایت حرارتی
L	طول کانال
$Nu_x=\frac{q_w(x)}{T_w-T_0}\left(\frac{x}{k}\right)$	عدد نوسلت موضعی
$Nu_{(L)}=\frac{hL}{k}$	عددنوسلت‌موضعی‌دردهانهٔ خروجی کانال
P	فشار
P^*	فشار بی‌بعد
$P=Gr^{1/2}p^*$	فشاربی بعد
P_m	فشار حرکت
Pr	عدد پرانتل
q''	شار حرارتی از سطح به سیال
$Ra = Pr\frac{b}{L}.Gr$	عدد رایلی
$Ra^* = PrGr^*$	عدد رایلی
$Re=\frac{u_0 b}{\nu}$	عدد رینولدز
T	دما
u	سرعت در جهت طول
$u_c=\sqrt{g\beta x(T_w-T_0)}$	سرعت جابه‌جایی طبیعی
$u_{ref}=\nu/b$	سرعت مرجع
$U_{ref}=\nu/bGr^{1/2}$	سرعت مرجع
UWT	دمای یکنواخت سطح
UWH	شارحرارتی یکنواخت سطح
v	سرعت درجهت عرض
x	مختصات در جهت طول
$X=x/b$	نسبت طول به عرض کانال
y	مختصات در جهت عرض
Y	متغیر بی‌بعد در جهت عرض (معادلهٔ ۱۳)

فهرست علائم یونانی

β	ضریب انبساط حجمی
δ	ضخامت لایه مرزی گرمایی
ξ	متغیر بی‌بعد در جهت طول
η	متغیر بی‌بعد در جهت عرض
η_e	ضخامت لایه مرزی بی‌بعد
η_{sp}	تعریف شده در معادلهٔ (۱۱)
θ	دمای بی بعد
ν	ویسکوزیتهٔ سینماتیکی
ρ	دانسیته
τ_w	تنش برشی روی سطح

زیرنویسها

c	صفحهٔ تقارن
e	خارج لایه مرزی
0	ورودی
w	سطح

عمودی در قفسه‌هایی ردیف می‌شوند. در نهایت برای خنک کردن قطعات الکترونیکی از بین این صفحات سیال عبور می‌دهند. بسته به نوع و حساسیت این قطعات، از روشهای انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری، طبیعی و یا توأم استفاده می‌شود ۱ و ۲].

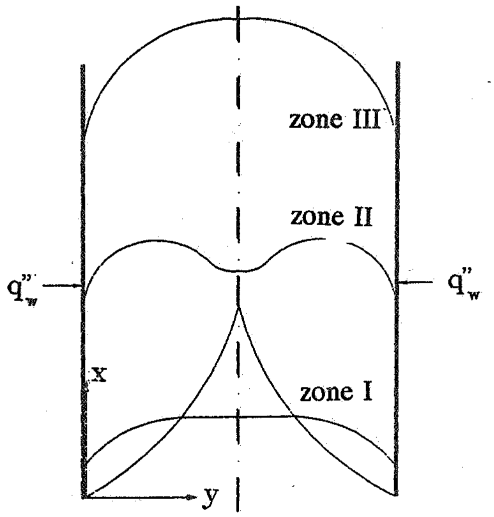
پژوهشگران بسیاری در زمینهٔ جابه‌جایی طبیعی دربین صفحات موازی کار کرده و مطالعات وسیعی انجام داده‌اند. تاریخچهٔ مدل کردن جابه‌جایی طبیعی در بین دوصفحهٔ موازی به سال ۱۹۴۲ و کار تجربی الن‌باس [۳] برمی‌گردد. الن‌باس جریان جابه جایی طبیعی در بین دو صفحهٔ موازی با شرط مرزی دمای یکنواخت برای سطح را مورد بررسی قرارداد و برای فاصلهٔ خیلی کوچک بین صفحات موازی مشاهده کرد که عدد نوسلت متناسب با عدد رایلی است. دراین تحقیق محدوده وسیعی از اعداد رایلی $10^5 \leq Ra^* \leq 0/2$ موردآزمایش قرارگرفت. جریان جابه‌جایی طبیعی روی یک صفحه با شرط مرزی شار حرارتی یکنواخت برای سطح توسط اسپارو و گرگ [۴] مورد مطالعه قرارگرفت. دراین تحقیق با استفاده از روش حل تشابهی، جریان جابه‌جایی طبیعی روی یک صفحه حل شد و رابطه‌ای برای تغییرات دمای صفحه براساس عدد رایلی پیشنهاد شد. سپس تحقیقی توسط بودیا و استیرل [۵] روی جریان جابه‌جایی طبیعی در بین دو صفحهٔ موازی با شرط مرزی دمای یکنواخت سطح با استفاده از روشهای عددی انجام شد. دراین مطالعه معادله‌های لایه مرزی، با فرض توزیع سرعت و دمای ورودی به دهانهٔ کانال یکنواخت حل شد. نتایج حاصل از این روش عددی با نتایج تجربی الن باس مطابقت خوبی داشت. همین مسئله با شرط مرزی شار حرارتی یکنواخت برای سطح توسط سوبل، لاندیس ومولر [۶] با استفاده از روش عددی حل شد. کیتل بورو [۷] و ناکامورا [۸] معادله‌های اساسی حاکم برجریان راکه به شکل بیضوی است، بدون تقریب لایه مرزی حل کرده اند. دراین روشهای عددی شرایط ورودی جریان ازنظرفیزیکی کاملا" توسعه یافته بایک انبساط ناگهانی بزرگ درنظرگرفته شده است وتنهادرچندموردنتایج

این دوتحقیق باهم مطابقت خوبی دارند. رامـاناتن [۹] بـرای حـل مشکل شرایط ورودی و خروجی، کانال (با شرط مرزی شارحرارتی یکنواخت برای سطح) را در یک محفظهٔ بستهٔ خیلی بزرگ که دمای سطوح محفظه یکنواخت است، قرار داد و میدان جریان را محفظهٔ بسته با کانال در نظر گرفت. علی‌رغم انتخاب میدان محاسباتی خیلی بزرگ، نتایج اثرات سطوح محفظه به کلی حذف نشده است و عملاً سیال از طرف سطوح محفظه پیشگرم و سپس وارد کانال می‌شود. نایلور [۱۰] برای شرط مرزی ورودی، جریان جفری - هـامل را درنظر گرفت. نتایج حل عددی نایلور خیلی نزدیک به نتایج ناکامورا [۴] است. نایلور برای بعضی مقادیر دبی جرمی، در دهانهٔ کانال یک نقطهٔ جدایی پیش بینی کرده است کـه ایـن نـقطهٔ جـدایـی روی پارامترهای‌موضعی‌انتقال‌حرارت در دهانهٔ ورودی اثر معکوس دارد.

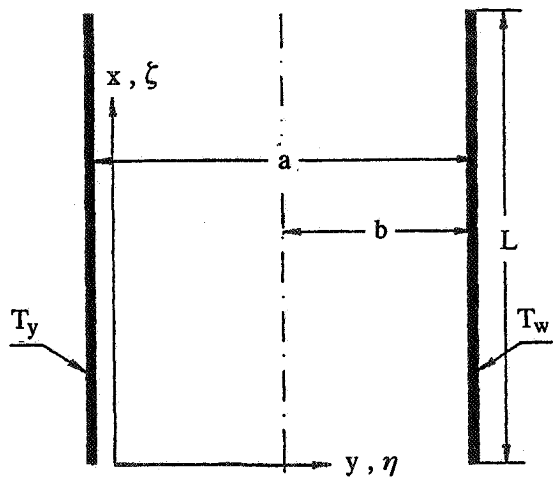
درایـن مـقاله، جـریان جـابه‌جایی طـبیعی آرام در بـین دو صفحهٔ مـوازی مـورد مـطالعه قـرار گـرفته است. مـعادله‌های بـقاء جـــریان دائـم، آرام و دو بـعدی بـا اسـتفاده از روش عـددی (ضمنی) «جعبه‌ای کلِر» حل شده است. شـرط مـرزی روی سـطح دردو حالت مختلف دمای یکنواخت و شار حـرارتـی یکـنواخت درنـظر گـرفته شـده است . فشـار حـرکتی ورودی بـرابـر فشـار دینامیکی سیال و فشار خروجی برابر فشار اسـتاتیکی اتـمسفر در نـظرگـرفته شـده است. دمـا و سـرعت سـیال در مـدخل کـانال یکنواخت و برابـر بـا T_0 و U_0 در نـظر گـرفته شـده‌است . مـقدار سرعت U_0 به این صورت تعیین می‌شود که فشار در خروجی کانال برابر با فشار محیط باشد.

جریان سیال داخل کانالی را که از سطح به سیال حـرارت داده می‌شود در نظر بگیرید. دراین حالت کـه حـرکت سـیال بـه عـلت اختلاف دمای سطح و سیال به‌وجود آمده است، در داخـل کـانال جریان جابه‌جایی طبیعی داریم. با وارد شدن سیال به کانال، لایـه مرزی از دهانهٔ ورودی شروع به رشد می‌کند و در فاصله‌ای از دهانه، لایه‌های مرزی به هم می‌رسند وبه این ترتیب سیال داخـل کـانال شتاب می‌گیرد و از کانال خارج می‌شود.

فرضهای زیر، برای ساده شدن معادله‌های مومنتم و انرژی در نـظر گرفته می‌شود. جریان آرام، دوبعدی، دائم، با تقریبهای لایه مرزی و همچنین خواص سیال به استثنای دانسیته در جـمله‌ای کـه شـامل نیروی غوطه‌وری است (فرض بوزینسک)ثابت فرض می‌شود. بـا



الف - توسعه جریان



ب - شرایط مرزی

شکل ۱- ابعاد هندسی وشرایط مرزی

ساده سازیهای فوق و با توجه به شکل ۱، معادله‌های حـاکـم بـر جریان به صورت زیر نوشته می‌شوند.

پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۱)$$

مومنتم در جهت x

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_m}{\partial x}+g\beta\,(T-T_0)+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (۲)$$

مومنتم در جهت y:

$$\frac{\partial p_m}{\partial y} = 0 \qquad (۳)$$

انرژی:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (۴)$$

برای حل میدان جریان با استفاده از روش نیمه تشابهی، میدان جریان به دو ناحیه تقسیم می‌شود (مطابق شکل الف). از دهانهٔ ورودی کانال تا جایی که لبهٔ لایه مرزی به هم می‌رسند را ناحیه اول و از محلی که لبهٔ لایه‌مرزی به هم می‌رسند تا انتهای کانال را ناحیه دوم یا ناحیه در حال توسعه می‌نامیم .البته لازم به ذکر است که ضخامت لایه مرزی سرعت و گرمایی در جریان طبیعی برای $Pr \leq 1$ بر هم منطبق هستند و این فرض برای هوا $Pr = 0/7$ با تقریب خیلی خوبی صادق است ، هرچند که برای $Pr >> 1$ نسبت σ_t/σ خیلی کوچکتر از ۱ خواهد بود [۱۱]. برای محاسبات ناحیه اول که ضخامت لایهٔ‌مرزی نازک است بهتراست از متغیرهای تشابهی استفاده‌شود [۱۲]، تا اولاً با یک ضخامت لایهٔ مرزی بی بعد و ثابت محاسبات انجام شود و ثانیاً نقطهٔ منفردی که در دهانهٔ کانال وجود دارد به این ترتیب برداشته شود. در جریان آرام جابه‌جایی با شرط مرزی دمای ثابت سطح متغیرتشابهی وتابع جریان به صورت زیرتعریف می شوند.

$$\eta = \left[\frac{g\beta\,(T_w - T_0)b^2}{\nu^2 x^3}\right]^{1/4} y \quad , \quad \psi(x,y) = (g\beta\,(T_w - T_0)\,\nu^2 x^3)^{1/4} f(x,\eta)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} \quad , \quad P_m^* = \frac{P_m b^2}{\rho Gr \nu^2} \quad , \quad \zeta = \frac{x}{bGr} \qquad (۵)$$

شرایط مرزی برای ناحیه اول به صورت زیرتعریف می شوند:

$$y=0 \quad , \quad u=v=0 \quad , \quad T=T_w \qquad (\text{۶-الف})$$

$$y=\delta \quad , \quad u=u_e \quad , \quad T=T_0 \qquad (\text{۶-ب})$$

معادلهٔ مومنتم ،انرژی و شرایط مرزی با استفاده از متغیرهای بی بعد و تعریف تابع جریان بی بعد به صورت زیر درمی‌آیند.

$$\frac{f'''}{Gr^{1/2}} + \frac{3}{4}\zeta^{1/2} f f'' = \zeta^{3/2}\left[f'\frac{\partial f'}{\partial \zeta} - f''\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{dp^*_m}{d\zeta} - Gr\theta \right] \qquad (۷)$$

$$\frac{\theta''}{PrGr^{1/2}} + \frac{3}{4}\zeta^{1/2} f\,\theta' = \zeta^{3/2}\left[f'\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \theta'\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right] \qquad (۸)$$

$$\eta = 0 \quad , \quad f = f' = 0 \quad , \quad \theta = 1 \qquad (\text{۹-الف})$$

$$\eta = \eta_e \quad , \quad f' = \bar{u}_e \quad , \quad \theta = 0 \qquad (\text{۹-ب})$$

درمعادله‌های (۸،۷) بالانویس (') دیفرانسیل نسبت به η است. درجریان داخلی چون جملهٔ گرادیان فشار در معادلهٔ مومنتم اضافه می‌شود، برای حل معادله‌های (۸،۷) به یک معادلهٔ دیگر نیاز داریم. دراین مورد از معادلهٔ بقای جرم در هر مقطع از کانال استفاده می‌کنیم.

$$u_0 b = \int_0^b u\,dy \qquad (۱۰)$$

معادلهٔ بقای جرم را به صورت بی‌بعد می‌نویسیم .

$$\eta_{sp} = \left(\frac{1}{Gr^2\zeta^3}\right)^{1/4} \quad , \quad f(\zeta,\eta_{sp}) = \frac{Re}{Gr}\zeta^{-3/2} \qquad (۱۱)$$

وقتی که ضخامت لایهٔ‌مرزی به اندازهٔ کافی ضخیم شد (لبهٔ لایهٔ‌مرزی تقریباً به صفحهٔ تقارن کانال نزدیک شد)، بهتر است ازمتغیرهای فیزیکی (x,y) استفاده شود ، چون تشابه از بین می‌رود. بنابراین، متغیرهای تشابهی بی بعد را به متغیرهای فیزیکی تبدیل می‌کنیم. متغیرهای فیزیکی برای ناحیه در حال توسعه به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$Y = \left[\frac{g\beta\,(T_w - T_0)}{\nu^2 b}\right]^{1/4} y \quad ,$$

$$\psi(x,y) = (g\beta\,(T_w - T_\circ)\,\nu^2 b^3)^{1/4}\, F(\zeta, Y) \tag{۱۲}$$

معادله‌های (۲) و (۴) و شرایط مرزی و بقای جرم به شکل زیردر می‌آیند.

$$F' \frac{\partial F'}{\partial \zeta} - F'' \frac{\partial F'}{\partial \zeta} = Gr(F''' + \theta) - \frac{dp^*_m}{d\zeta} \tag{۱۳}$$

$$F' \frac{\partial \theta'}{\partial \zeta} - \theta' \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{Gr}{Pr}\theta'' \tag{۱۴}$$

$$Y = 0 \quad , \quad F = F' = 0 \, , \quad \theta = 0$$

$$Y = Gr^{1/4} \quad , \quad F'' = 0 \quad , \quad \theta' = 0 \tag{۱۵-الف}$$

$$Y_c = Gr^{1/4} \quad , \quad F(\zeta, Y_c) = \frac{Re}{Gr^{1/4}} \tag{۱۵-ب}$$

معادله‌های بقاء برای هنگامی که شار حرارتی سطح به صورت یکنواخت است تقریباً به همین روش به‌دست می‌آیند. دراینجابرای پرهیزازتکرارفقط به ذکرمعادله‌هااکتفامی کنیم .

برای ناحیه اول ازمتغیرتشابهی استفاده می شود.

$$\eta = \left(\frac{g\beta q'' b^3}{k\nu^2 x^3}\right)^{1/4} y \quad , \quad \psi\,(x,y) = \left(\frac{g\beta\nu^2 q'' b x^3}{k}\right)^{1/4} f(x,\eta)$$

$$\varphi(x) = -(Gr^2\zeta^3)^{1/4} \tag{۱۶}$$

$$\frac{f'''}{Gr^{1/2}} + \frac{3}{4}\zeta^{1/2} f f'' = \zeta^{3/2}\left[f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - f'' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - Gr\varphi\theta + \frac{dp^*_m}{d\zeta} \right] \tag{۱۷}$$

$$\frac{\theta''}{Pr\,Gr^{1/2}} + \frac{3}{4}\zeta^{1/2}(f\theta' - f'\theta) = \zeta^{3/2}\left[f' \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \tag{۱۸}$$

$$\eta = 0 \quad , \quad f = f' = 0 \quad , \quad \theta' = 1$$

$$\eta = \eta_e \quad , \quad f' = \bar{u}_e \, , \quad \theta = 0 \tag{۱۹-الف}$$

$$\eta_{sp} = \left(\frac{1}{Gr^2\,\zeta^3}\right)^{1/2} \quad , \quad f(\zeta\,, \eta_{sp}) = \frac{Re}{Gr\,\zeta^{3/4}} \tag{۱۹-ب}$$

برای ناحیهٔ درحال توسعه ، معادله‌های بی بعدممنتم وانرژی وشرایط مرزی بی بعدبه صورت زیردرمی آیند.

$$Y = \left(\frac{g\beta\, q''}{k\nu^2}\right)^{1/4} y \quad ,$$

$$\psi(x,y) = \left(\frac{g\beta\,\nu^2 q'' b^4}{k}\right)^{1/4} F(\zeta, Y)$$

$$\varphi_f = -(1/Gr)^{1/4} \tag{۲۰}$$

$$GrF''' = F' \frac{\partial F'}{\partial \zeta} - F'' \frac{\partial F}{\partial \zeta} - Gr\varphi_f\theta + \frac{dp^*_m}{d\zeta} \tag{۲۱}$$

$$\frac{Gr}{Pr}\theta'' = F' \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \theta' \frac{\partial F}{\partial \zeta} \tag{۲۲}$$

$$Y = 0 \quad , \quad F = F' = 0 \, , \quad \theta' = 1$$

$$Y_c = Gr^{1/4} \quad , \quad F'' = 0 \quad , \quad \theta' = 0 \tag{۲۳-الف}$$

$$Y_c = Gr^{1/4} \quad , \quad F(\zeta, Y_c) = \frac{Re}{Gr^{1/4}} \tag{۲۳-ب}$$

۲- روش حل عددی معادله‌های دیفرانسیل

در جریانهای داخلی علاوه بر سرعت و دما، گرادیان فشار نیز در معادلهٔ مومنتم ظاهر می‌شود که برای حل میدان جریان و دما، نیاز به دانستن توزیع فشاراست . بنابراین، برای حل معادله‌های حاکم بر جریان با استفاده از روش تکرار، مقدار گرادیان فشار در هر مقطع را به‌دست می‌آوریم و سپس توزیع سرعت و دما را به کمک این توزیع فشار می‌یابیم. برای به‌دست آوردن گرادیان فشار از روش تکرار، دو روش مختلف وجودداردکه یکی به روش مقادیر ویژهٔ غیرخطی ودیگری به روش تابع مچول[1] معروف است [۱۳]. برای شرایطی که تنش برشی روی سطح مثبت باشد یعنی جدایی جریان وجود نداشته باشد از هر دو روش می‌توان استفاده کرد، ولی هنگامی که جریان همراه با جدایی باشد فقط روش تابع مچول قابل‌استفاده است. در این مقاله از روش مقادیر ویژه غیرخطی برای به‌دست آوردن گرادیان فشار

استفاده شده است.

برای تبدیل معادله‌های دیفرانسیل به عبارتهای جبری، روش ضمنی کلر[۲] به‌کار گرفته شده است [۱۴]. به‌طور خلاصه می‌توان به خصوصیات این روش اشاره کرد. ۱) دقت این روش در دو جهت x و y ضمنی (با فاصلهٔ جهت یکنواخت و یا نایکنواخت) مرتبهٔ دوم است ۲) در جهت جریان می‌توان قدمهای بزرگ برداشت ۳) نوشتن برنامهٔ کامپیوتری برای حل تعداد زیادی معادله‌های کوپله با استفاده از این روش آسان است.

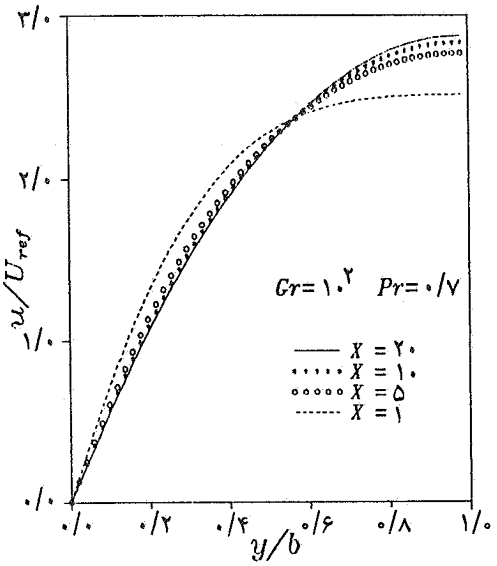
برای حل معادلهٔ دیفرانسیل از روش جعبه‌ای بایستی مراحل ذیل طی شود. ابتدا معادلهٔ (یا معادله‌های) دیفرانسیل از مرتبهٔ بالا به یک دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول کاهش داده شود. سپس با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی، دستگاه معادله‌های دیفرانسیل به یک دستگاه جبری تبدیل شود. آن‌گاه درصورتی که عبارتهای جبری، غیرخطی باشند بایستی خطی و سپس به صورت ماتریسی نوشته شوند. دستگاه خطی حاصل بااستفاده از روش حذف بلوک سه قطری[۳] حل می‌شود.

۳- نتایج

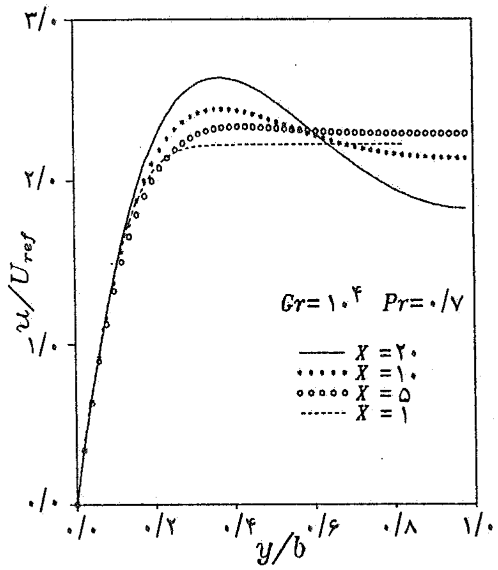
۳-۱- شرط مرزی دمای یکنواخت برای سطح

شکلهای (۲، ۳، ۴ و ۵) توزیع سرعت و دمای بی‌بعد رادر چند مقطع مختلف کانال برای اعداد گراشف $۱۰^۴$ و $Gr=۱۰^۲$ وعدد پرانتل $Pr=۰/۷$ و نسبت طول به عرض $L/b= ۲۰$ نشان می‌دهند. در مقاطع اولیه $(X=\frac{x}{b}) = ۱$ توزیع سرعت ودمای سیال تقریباً همان توزیع سرعت ودمای ورودی است. با فاصله گرفتن از دهانهٔ ورودی اثر نیروی غوطه وری افزایش می‌یابد و توزیع سرعت ودمااز توزیع سرعت ودمای ورودی فاصله می‌گیرد. در حالتی که‌اختلاف دمای سطح و سیال بیشتر است (شکل ۳) توزیع سرعت دارای یک ماکزیمم در نزدیکی سطح و یک مینیمم در صفحهٔ تقارن کانال می‌شود و هنگامی که اختلاف دما کمتر (شکل ۲) و نسبت طول به عرض کانال به اندازهٔ کافی بزرگ است، توزیع سرعت به سمت توزیع سرعت جریان کاملاً توسعه یافتهٔ جابه‌جایی اجباری بین دوصفحهٔ موازی میل می‌کند.

در حالتی که طول به عرض کانال بزرگ و عدد رایلی کوچک است (شکل ۴) در انتهای کانال مکانیزم انتقال حرارت بیشتربه



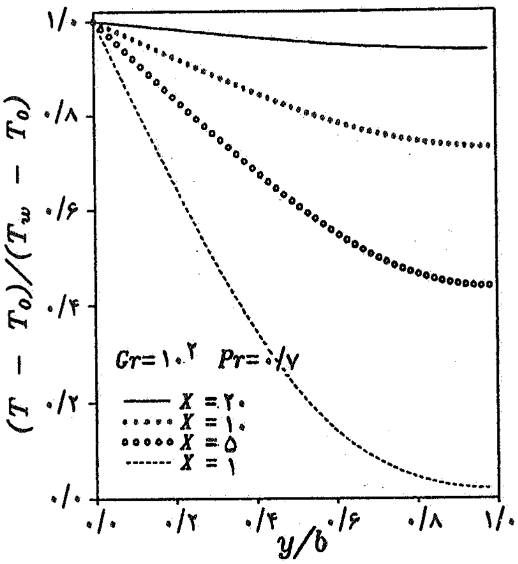
شکل ۲- توزیع سرعت بی بعد در چند مقطع مختلف کانال



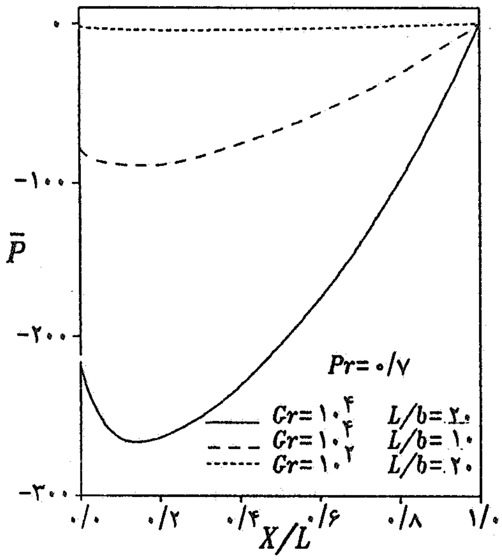
شکل ۳- توزیع سرعت بی بعد در چند مقطع مختلف کانال

صورت هدایتی است و تقریباً دمای سیال به دمای سطح نزدیک‌و سیال از نظر حرارتی کاملاً توسعه یافته می‌شود. باتوجه به شکلهای (۲ تا ۵) مشاهده می‌شود هنگامی که عدد گراشف کوچک است، ضخامت لایه‌مرزی سرعت و دما بیشتر از هنگامی است که عدد گراشف بزرگ است. بنابراین با افزایش عدد گراشف طول‌هیدرودینامیکی و طول حرارتی افزایش می‌یابند.

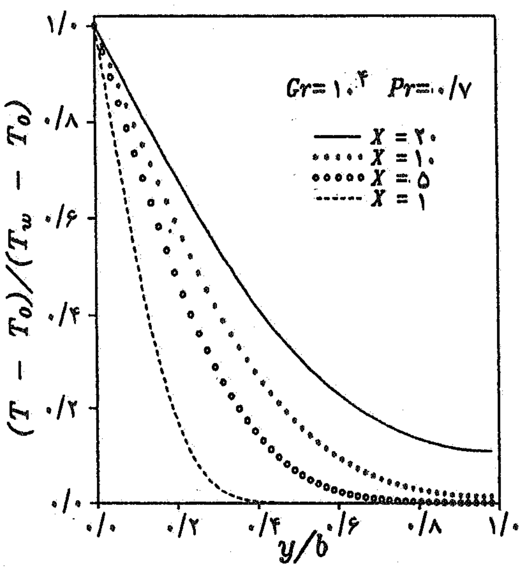
شکل (۶) تغییرات فشار بی بعد را در طول کانال برای اعداد گراشف $۱۰^۴$ و $Gr = ۱۰^۲$ و عدد پرانتل $Pr = ۰/۷$ و نسبتهای



شکل ۴- توزیع دمای بی بعد در چند مقطع مختلف کانال



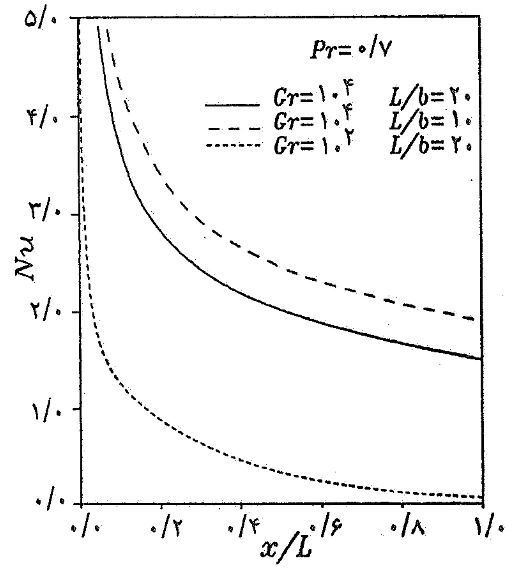
شکل ۶- تغییرات فشار بی بعد در طول کانال



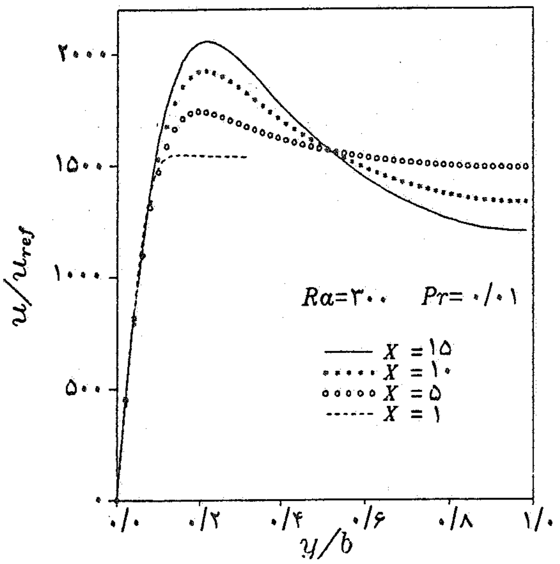
شکل ۵- توزیع دمای بی بعد در چند مقطع مختلف کانال

طول به عرض ۲۰ و ۱۰ = $\frac{L}{b}$ نشان می‌دهد. این منحنی در حقیقت‌میزان مکش سیال از داخل کانال و به عبارت دیگر دبی سیال ازمجرا را نیز نشان می‌دهد. یعنی هر چه اختلاف بین فشار $\bar{P}$ در ورودی و خروجی بیشتر باشد میزان مکش[۴] ایجاد شده و دبی سیال حاصل از نیروی غوطه‌وری بیشتر خواهد بود. واضح است که با افزایش عدد گراشف (مثلاً با افزایش $T_W - T_o$ در حالی‌که سایرپارامترها ثابت بمانند) سرعت جریان طبیعی یا دبی سیال در کانال زیاد می‌شود. این موضوع به صورت افزایش در اختلاف فشار ورودی و خروجی در شکل (۶) ظاهر شده‌است. برای یک عدد گراشف ثابت، اگر نسبت طول به عرض مجرا (L/b) زیاد شود باز هم دبی سیال و مکش کانال زیاد می‌شود. این موضوع به دلیل افزایش سرعت سیال در خروجی است که از معادلهٔ تعریف سرعت جابه‌جایی U_c مشهود است. اگر ΔT و پهنای کانال را ثابت نگهداریم Gr ثابت می‌ماند و تنها راه اضافه کردن L/b افزایش طول مجراست. با زیاد شدن طول مجرا، سرعت جابه‌جایی طبیعی که با $\sqrt{L}$ متناسب است در خروجی زیاد می‌شود که افزایش دبی و در نتیجه مکش سیال را در پی دارد. نکتهٔ دیگری که در مورد شکل (۶) قابل ذکر است نحوهٔ تغییرات فشار در طول کانال (x/L) است. ملاحظه می‌شود که در یک نقطه‌ای داخل کانال فشار به حداقل می‌رسد و سپس افزایش می‌یابد.

شکل (۷) تغییرات عدد نوسلت موضعی را در طول مجرا برای همان پارامترهای شکل (۶) برای دمای ثابت سطح و Pr = ۰/۷ نشان می‌دهد. اولاً با رشد لایه مرزی در جهت x که گرادیان دمای سیال در روی سطح کاهش می‌یابد عدد نوسلت موضعی نیز کاهش می‌یابد. ثانیاً با زیاد شدن عدد رینولدز که سرعتها افزایش می‌یابند عدد نوسلت نیز زیاد می‌شود. تأثیر نسبت طول به پهنای کانال (L/b) بر عدد نوسلت نیز در شکل (۷) نشان داده‌شده‌است. کاهش عدد نوسلت به ازای افزایش (L/b) به معنای کاهش ضریب انتقال حرارت موضعی نیست. بلکه اصولاً افزایش L/b باعث افزایش



شکل ۷- تغییرات عدد نوسلت موضعی در طول کانال



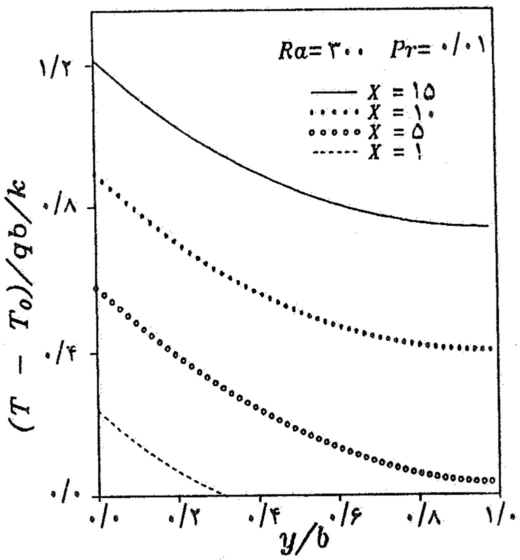
شکل ۸- توزیع سرعت بی بعد در چند مقطع مختلف کانال

دبی سیال و در نتیجه افزایش ضریب انتقال حرارت می‌شود. اما در شکل ظاهراً خلاف این به نظر می‌رسد که ناشی از تغییر L است . به این ترتیب که چون عدد گراشف در دو حالت مختلف یکسان است ، تنها راه کاهش $\frac{L}{b}$ در حقیقت کاهش طول مجراست . چون‌طول مجرا دردو حالت ۲۰ و ۱۰ = L/b برابر نیست ، لذا یک مقدار مساوی x/L در دو حالت دو نقطهٔ مختلف از طول مجرا را نشان می‌دهد. لذا نبایستی تصور کرد که در یک x مساوی در دو حالت ، مقدار Nu در L/b بزرگتر کوچکتر شده‌است . در حقیقت بایستی Nu موضعی x در حالت ۲۰ = L/b را با مقدار Nu در ۲x در ۱۰ = L/b مقایسه کرد. به این ترتیب نتیجه همان است که افزایش L/b باعث افزایش ضریب انتقال گرمای موضعی می‌شود.

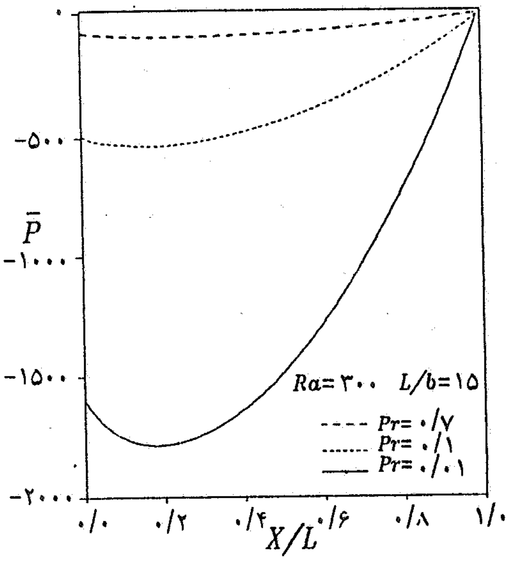
۳-۲- شرط مرزی شارحرارتی یکنواخت سطح

شکلهای (۸ و ۹) توزیع سرعت ودمای بی بعدرادرچندمقطع مختلف کانال ، برای عددرایلی ۳۰۰=Ra ونسبت طول به عرض L/b=۱۵ وعددپرانتل ۰/۰۱=Pr نشان می دهد. این اشکال برای شرط مرزی شار گرمای یکنواخت برای سطح به دست آمده‌اند.شکل (۸) نشان می‌دهد که هرچه از دهانه ورودی دور شویم ضخامت لایه مرزی سرعت بیشتر می‌شود. ضخامت لایه مرزی در حقیقت آن مقدار از y/b است که از آن به بعد توزیع سرعت تخت می‌شود. مثلاً برای ۱ = X = x/b پروفیل سرعت در ۰/۳ < y/b تخت می‌شود در حالی‌که در ۵ ≤ X ضخامت لایه مرزی به نصف پهنای کانال هم می‌رسد. یعنی در ۱ = X در ناحیه II قرار داریم . در همین شکل ملاحظه می‌شود که حداکثر سرعت در نقطه‌ای در داخل لایه مرزی واقع است . این موضوع برای نواحی I و IIکه در شکل (۱) نشان داده شده‌است صادق است ولی در ناحیه کاملاً توسعه یافته III حداکثر سرعت در وسط واقع می‌شود زیرا شرط مرزی گرمایی به طور کامل در سرتاسر سیال داخل مجرا نفوذ می‌کند.مسئلهٔ رشد لایه مرزی سرعت و دما (که برای ۱ ≥ Pr بر هم منطبق هستند) در شکل (۹) واضحتر دیده‌می‌شود. این شکل نشان می‌دهدکه‌ضخامت لایه مرزی برای ۱ = x حدوداً y = ۰/۳b است، در حالی‌که در ۵ ≤ X عمق نفوذ شرط مرزی گرمای از صفحه تقارن مجرا نیز تجاوز کرده‌است . تساوی گرادیان دمای سیال بر روی سطح که در منحنی شکل (۹) دیده‌می‌شود ناشی از شار گرمای یکنواخت برای سطح است .

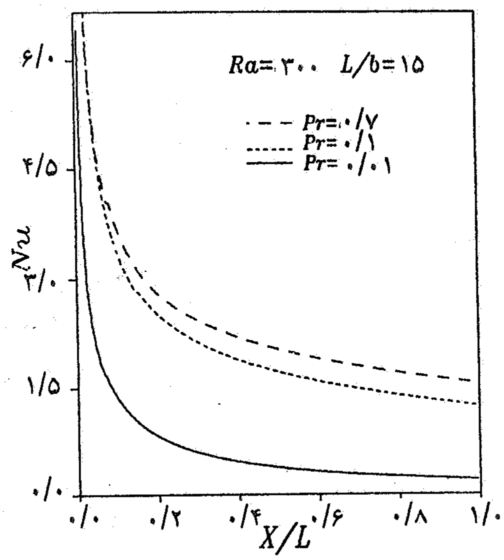
شکل (۱۰) تأثیر عدد پرانتل را بر مکش سیال نشان می‌دهد. با کاهش عدد پرانتل از ۰/۷ به ۰/۰۱ مکش سیال افزایش یافته واختلاف فشار ورودی وخروجی ($\overline{P}$ در ۰ = x) شدیداً زیادمی‌شود. به بیان دیگر کاهش عدد پرانتل که به معنای زیاد شدن نفوذ گرما در مقایسه با نفوذ مومنتوم است افزایش نسبی نیروی غوطه‌وری در مقابل اصطکاک را در پی دارد. این امر سبب افزایش دبی سیال از مجرا می‌شود که به صورت افزایش در مکش سیال



شکل ۹- توزیع دمای بی بعد در چند مقطع مختلف کانال



شکل ۱۰- تغییرات فشار بی بعد در طول کانال

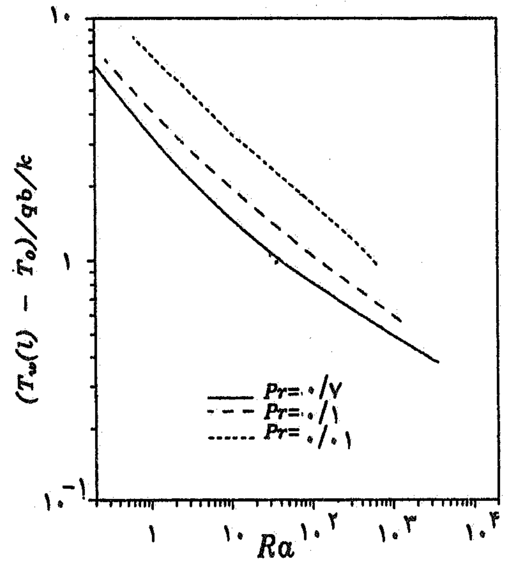


شکل ۱۱- تغییرات عدد نوسلت موضعی در طول کانال

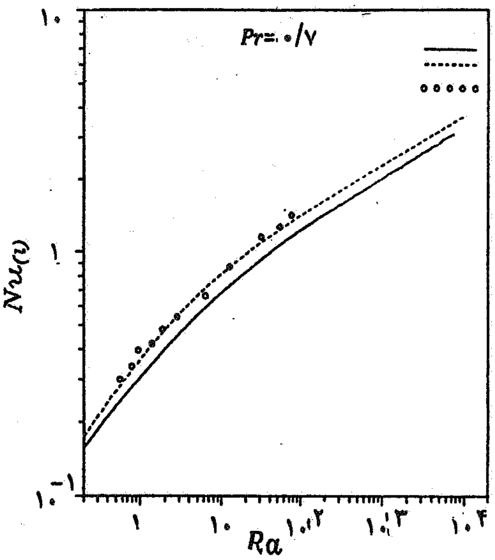
جلوه می‌کند. تأثیر عدد پرانتل بر عدد نوسلت در شکل (۱۱) نشان داده‌شده‌است .با افزایش عدد پرانتل عدد نوسلت زیاد می‌شود. این ویژگی تمام جریانهای جابه‌جایی اعم از طبیعی و اجباری‌ست. افزایش عددپرانتل موجب کاهش ضخامت لایه مرزی و در نتیجه افزایش گرادیان دمای سیال روی سطح و در نتیجه افزایش عدد نوسلت می‌شود.

شکل (۱۲) تغییرات دمای سطح در خروجی رابرحسب عدد رایلی برای اعداد پرانتل ۰/۰۱ ، ۰/۱ و ۰/۷ نشان می‌دهد. باتوجه به روند این منحنی در اعداد رایلی کوچک دمای سطح افزایش می‌یابد. اگر به شکل (۱۳) (که تغییرات عدد نوسلت در دهانهٔ خروجی کانال Nu(x= L) برحسب عدد رایلی را نشان می‌دهد) توجه کنیم بایستی انتظار داشته باشیم که دمای سطح با افزایش عدد رایلی کاهش یابد. در اعداد رایلی کوچک مکانیزم انتقال حرارت هدایتی است و مقدار عدد نوسلت موضعی در دهانهٔ خروجی کم و دمای سطح در خروجی کانال بیشترین مقدار خود را دارد و با افزایش عدد رایلی مکانیزم انتقال حرارت توأم هدایتی وجابه‌جایی طبیعی است که باعث افزایش نرخ انتقال حرارت و عددنوسلت موضعی وکاهش دمای سطح می‌شود.

شکل (۱۳) تغییرات عدد نوسلت موضعی در خروجی کانال (Nu(x= L)) را برحسب عدد رایلی نشان می‌دهد. در این شکل نتایج حل عددی و نتایج تجربی و رابطهٔ تجربی ریتز و استاتزمن [۱۵] با هم مقایسه شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود هنگامی که عدد رایلی کوچک است نتایج حل عددی با نتایج تجربی ریتز و استاتزمن مطابقت خوبی دارد ولی با افزایش عدد رایلی دقت نتایج حل عددی کاسته می‌شود. البته نتایج تجربی به‌دست آمده توسطریتز و استاتزمن در حدود ده درصد (۱۰٪) بر روی اندازه گیری عددرایلی وپنج‌درصد (۵٪) برروی‌اندازه گیری‌دماخطا دارد [۹].



شکل ۱۲- تغییرات ماکزیمم دمای سطح بر حسب عدد رایلی



شکل ۱۳ - تغییرات عدد نوسلت موضعی دهانه خروجی بر حسب عدد رایلی و مقایسه با نتایج تجربی

۴- نتیجه گیری

جریان جابه‌جایی طبیعی آرام بین دو صفحه موازی تحت شرایط مرزی گرمایی دمای ثابت و شارگرمای ثابت برای سطح به روش عددی حل شده‌است . جریان سیال داخل مجرا به دو ناحیه تقسیم شده که در ناحیه اول از روش حل نیمه تشابهی استفاده شد. معادله‌های حاکم به روش جعبه‌ای کلر حل شد و نتایج برای پارامترهای هندسی (L/b) و اعداد بدون بعد جریان مانند اعداد گراشف و اعداد پرانتل مختلف ارائه شده‌است . نتایج حل عددی برای عدد نوسلت با نتایج تجربی موجود مقایسه شد و دقت نتایج با توجه به عدم قطعیت در نتایج تجربی معقول به نظر می‌رسد.

واژه‌نامه

1. Mechul
2. keller
3. block - tridiagonal elimination
4. draft

مراجع

۱. خسروی، محمدرضا ورستمی ،علی اصغر،" جریان توأم جابه‌جایی طبیعی واجباری دربین صفحات موازی همراه باانتقال حرارت،" *سومین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک* ، جلد اول ، صفحه ۳۲۹-۳۱۷، (۱۳۷۴).

۲. خسروی، محمدرضا، حل عددی جابه‌جایی طبیعی و توام (جابه‌جایی طبیعی واجباری) در یک کانال عمودی، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان (۱۳۷۴)

3. Elenbaas, W., " Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection, " *Physica*, Vol. 9, No. 1, pp. 1 - 28, 1942.

4. Sparrow, E. M., and Gregg, J. L., " Laminar Free Convection from a Vertical Plate with Uniform Surface Heat Flux, " *Transactions of ASME*, Vol. 78, pp. 435-440, 1956.

5. Bodia, J. R., and Osterle, J. F., " The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 84, pp. 40-44, 1962.

6. Soble, N., Landis, F., and Mueller, W., " Natural Convection Heat Transfer in Short Vertical Channels Including the Effects of Stager, " *Porceedings, Third International Heat Transfer Conference*, Vol. 2, pp. 121-125 , 1966.

7. Ketteleborough, C. F., " Transient Laminar Free Convection between Heated Vertical Plates Including Entrance Effects, " *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 15, pp. 883-896, 1972.

8. Nakamaura, H., Yataka, A., and Naitou, T., "Heat Transfer by Free Convection between Two Parallel Flat Plates," *Numerical Heat Transfer*, Vol 5, pp. 95-106, 1982.

9. Ramanthan, S., Kumar, R., and Wang, T., "Natural Convection from Heated Plates in Large Enclosures," *Proceedings of the* 1988 *National Heat Transfer Conference*, Houston, TX, ASME HTD-96, Vol. 2, pp. 155-163, 1988.

10. Naylor, D., Floryan, J. M., and Tarasuk, J. D., "A Numerical Study of Developing Free Convection Between Isothermal Vertical Plates, "*Journal of Heat Transfer ASME,* , Vol. 113, 1991.

11. Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L., and Sammakia, B., *Buoyancy Induced Flows and Transport*, Hemissphere, pp. 52-53, 1988.

12. Cebeci, T., and Bardshaw, P., *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer,* Springer-Verlag, 1984.

13. Bradshaw, P., Cebeci, T., and Whitelaw, J. H., *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flows*, Academic Press, London, 1981.

14. Keller, H.B., *A New Difference Scheme for Parabolic Problems, in Numerical Solution of Partial-Differential Equation*, Edited by j. Bramble, Vol.II, Academic, New York, 1970.

15. Writz, R. A. and Stutzman, I. J., "Experiments on Free Convection Heat Transfer," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 501-507, 1982.