

# تحلیل ارتعاش و پایداری ورقهای دارای حرکت محوری به روش اجزای محدود استاندارد و طیفی

شهابالدین حاتمی\*، مجتبی ازهری\*\* و محمد مهدی سعادتپور\*\*  
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۴/۱۰/۲۶ - دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۷/۸)

**چکیده** - در مقاله حاضر، روشهای اجزای محدود استاندارد و طیفی براساس نظریه کلاسیک ورق برای تحلیل ارتعاش و پایداری دینامیکی ورقهای نازک دارای حرکت محوری و تحت اثر نیروهای غشایی، توسعه داده شده‌اند. فرمولسازی اجزای محدود استاندارد به کمک اصل هامیلتون و مستقل از نوع جزء استخراج شده است. البته برای حل مثالهای عددی یک جزء چهارضلعی ایزوپارامتریک با توابع درونیابی لاگرانژ بسط داده شده است. روش اجزای محدود طیفی در واقع حل معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق دارای سرعت محوری است. روش طیفی هرچند محدودیتهایی را از حیث شرایط مرزی ورق و نیروهای غشایی داراست، اما منجر به حل دقیق ارتعاش آزاد و پایداری دینامیکی ورق متحرک بر روی غلتکهای موازی می‌شود. این روش می‌تواند مبنای خوبی برای تعیین میزان دقت روشهای عددی باشد.

واژگان کلیدی: ورق دارای حرکت محوری، اجزای محدود، اجزای محدود طیفی، ارتعاشات، پایداری، حل دقیق، توابع لاگرانژ

## Vibration and Stability of Axially Moving Plates by Standard and Spectral Finite Element Methods

S. Hatami, M. Azhari, and M.M. Saadatpour

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** Based on classical plate theory, standard and spectral finite element methods are extended for vibration and dynamic stability of axially moving thin plates subjected to in-plane forces. The formulation of the standard method earned through Hamilton's principle is independent of element type. But for solving numerical examples, an isoparametric quadrilateral element is developed using Lagrange interpolation functions. The spectral method is, in fact, the solution of motion equation for an axially moving plate. Although this method has some limitations concerning boundary condition of plate and in-plane forces, it

\*\* - استاد

\* - دانشجوی دکترا

leads to an exact solution of free vibration and stability of plates traveling on parallel rollers. The method can be used as a benchmark of accuracy of other numerical methods.

**Keywords:** Axially moving plate, Finite element, Spectral finite element method, Vibration, Stability, Exact solution, Lagrange functions

## ۱- مقدمه

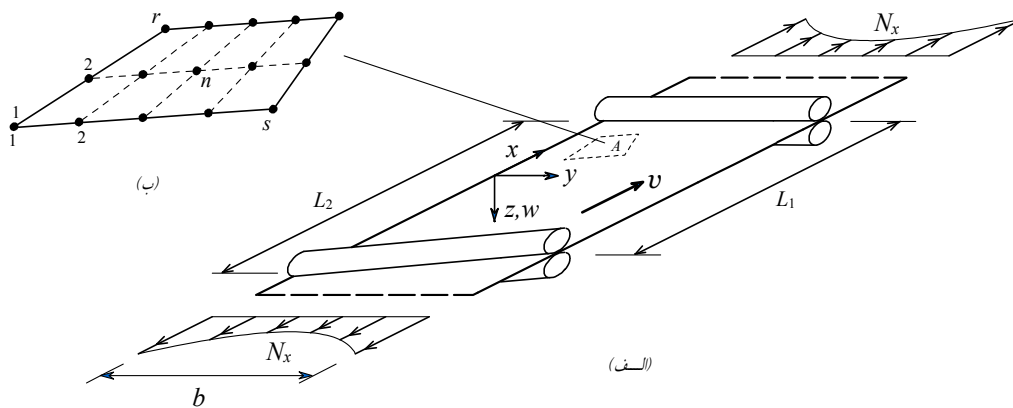
مشخصه‌های دینامیکی و پایداری اجسام دارای حرکت محوری به دلیل اهمیت صنعتی آنها، تاکنون توسط محققان بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است. بعضی از موارد کاربردی آنها، نوارهای مغناطیسی، اره‌های نواری، تسمه‌ها و زنجیرهای انتقال نیرو، الیاف منسوجات و کامپوزیتها هنگام تولید، کابل تراموای هوایی، ورقه‌های کاغذ، پلاستیک و کامپوزیت در حین فرایند، صفحات نقاله، و لوله‌ها و تیرهای انتقال سیالات اند. در این سیستمها سرعت محوری نقشی مهم در تغییر رفتار دینامیکی ایفا می‌کند؛ نیروهای گریز از مرکز مربوط به انحنای سرعت محوری سبب کاهش سختی سیستم شده و نیروهای کوریولیس مرتبط با دوران و سرعت محوری منجر به مودهای ارتعاشی متحرک می‌شوند. فرکانسهای طبیعی با افزایش سرعت حرکت، کاهش می‌یابند و در سرعت مشخصی، اولین فرکانس نوسان صفر شده و جسم در حال حرکت ناپایدار می‌شود، که به این سرعت، سرعت بحرانی اتلاق می‌شود. همچنین بردارهای ویژه ارتعاش آزاد به دلیل مؤلفه شتاب همرفتی در معادلات حرکت، مختلط و وابسته به سرعت حرکت اند [۱].

ورقهای متحرک بخش قابل ملاحظه‌ای از کاربردهای اجسام متحرک در صنعت را تشکیل می‌دهند، با این وجود در اکثر مطالعات به منظور سادگی حل، این نوع ورقها توسط سیستمهای یک بعدی همچون رشته [۲-۴] و تیر [۵-۹] مدل می‌شوند. لنگوک و مک‌کالیون برای حل ارتعاشات تیغه‌اره نواری تحت بارهای درون صفحه از مدل دوبعدی ورق استفاده کرده و اثرات سرعت حرکت و تنشهای کششی نایکناخت اعمال شده در عرض ورق را بر روی فرکانسهای طبیعی سیستم بررسی می‌کنند [۱۰]. لین مشخصه‌های پایداری دینامیکی و

ارتعاش یک ورق متحرک تحت کشش یکنواخت را با استفاده از روش گالرکین به دست می‌آورد [۱۱]. شرایط تکیه گاهی ورق در دو تحقیق اخیر، در راستای حرکت به صورت آزاد و در راستای عمود بر آن مفصلی فرض می‌شود. اخیراً لیو و حمیدزاده با استفاده از معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق در حال حرکت، یک روش تحلیلی برای تعادل، نیروهای غشایی و پایداری یک ورق مستطیلی چهارطرف مفصل ارائه کردند [۱۲]. در این تحقیق تغییر شکل جانبی ورق در هر دو راستا به صورت سینوسی فرض می‌شود.

صنایعی که برای دستیابی به کیفیت بهتر محصول بررسی رفتار دینامیکی را مدنظر قرار می‌دهند، غالباً از روش اجزای محدود بهره می‌گیرند. این روش از لحاظ ریاضی یک وضعیت پایدار را فراهم کرده و به علاوه اجازه مدلسازی هندسه پیچیده سازه را می‌دهد که هر دو این خصوصیات در کاربردهای صنعتی ضروری‌اند. روش اجزای محدود استاندارد، روشی بسیار کارا و شناخته شده است. در مطالعه حاضر فرمولسازی اجزای محدود استاندارد برای تحلیل ورقهای با حرکت محوری توسعه داده می‌شود. فرمولسازی ارائه شده مستقل از نوع جزء بوده، لیکن برای استخراج نتایج، یک سوپرالمان چهارضلعی ایزوپارامتریک با توابع اساسی از نوع توابع لاگرانژ برای تحلیل پایداری و ارتعاش ورق در حال حرکت ارائه می‌شود.

در مواردی که فرکانسهای بالای سازه و یا دقت بالا در تحلیل مورد نظر باشد، روش اجزای محدود استاندارد به یک مدل رایانه‌ای بزرگ نیازمند است. در روش اجزای محدود طیفی [۱۳-۱۹]، اجزای همانند جزء محدود استاندارد فرمولبندی و سرهم می‌شوند، لیکن لازم به ذکر است که توابع اساسی، حل دقیق معادلات حرکت‌اند. این کار تعداد درجات آزادی را کاهش داده و دقت را افزایش می‌دهد. در مقاله حاضر اجزای محدود



شکل ۱- الف) یک ورق دارای سرعت محوری تحت نیروهای غشایی، ب) یک جزء از ورق به همراه نقاط گرهی

سطح ورق به تعدادی جزء تقسیم شده که یکی از این اجزای به مساحت  $A$  در شکل (۱-ب) به همراه نقاط گرهی آن نشان داده شده است. لازم به ذکر است که هر جزء شامل بخشی از ورق پیوسته متحرک است که از یک پنجره ثابت در سطح  $xy$  عبور می کند.  $w$  تغییر مکان جانبی یک نقطه از جزء بوده که به صورت زیر قابل بیان است

$$w = \sum_{n=1}^N \Phi_n(x, y) d_n(t) = \langle \Phi \rangle \{d\} \quad (1)$$

به طوری که  $\Phi_n$ ،  $n$  امین جمله از توابع شکل است.  $d_n$  تغییر مکان نقطه گرهی  $n$  ام در راستای  $z$  و یا دوران آن در راستاهای  $x$  و  $y$  است. بدیهی است اگر  $w$  تنها از درونیایی تغییر مکانهای جانبی نقاط گرهی به دست آید، به ازای هر گره فقط یک درجه آزادی تعریف می شود و در این صورت  $N$  مساوی تعداد نقاط گرهی است.

برای استخراج فرمولسازی اجزای محدود استاندارد از اصل هامیلتون طبق معادله زیر بهره می گیریم

$$\int_{t_i}^{t_f} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (2)$$

که در آن انرژی پتانسیل کل جزء ورق  $U$  شامل انرژی کرنشی ناشی از خمش  $U_b$  و انرژی پتانسیل ناشی از تنشهای غشایی  $U_g$  می شود

$$U = U_b + U_g = \frac{1}{2} \int_A \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dA + \frac{1}{2} \int_A (N_x w_{,x}^2 + N_y w_{,y}^2 + 2N_{xy} w_{,x} w_{,y}) dA \quad (3)$$

طیفی نیز که یک روش اجزای محدود مستقیم بوده و در حوزه فرکانس فرمولبندی می شود، برای ورقهای در حال حرکت بسط داده می شود. با این روش می توان به حل دقیق ارتعاش آزاد و پایداری یک ورق در حال حرکت بر روی غلتکهای عمود بر راستای حرکت دست یافت. البته این روش محدودیتهایی از لحاظ شرایط مرزی و بارهای درون صفحه دارد.

## ۲- اجزای محدود استاندارد

شکل (۱-الف) یک ورق پیوسته را نشان می دهد که با سرعت ثابت  $U$  مابین دو تکیه گاه غلتکی دوطرفه در راستای طولی خود در حال حرکت است. دستگاه مختصات  $(x, y, z)$  در فضا ثابت بوده و راستای  $x$  آن منطبق بر راستای حرکت ورق در نظر گرفته شده است. ورق تحت تنش کششی محوری نایکنواختی در راستای  $x$  قرار می گیرد که برآیند این تنش در ضخامت ورق با  $N_x$  نشان داده می شود. در حالت کلی ممکن است تنش نرمال دیگری در راستای  $y$  و نیز تنش برشی در سطح  $xy$  که به ترتیب با  $N_y$  و  $N_{xy}$  نشان داده می شوند به ورق در حال حرکت اثر کنند که این دو در شکل (۱) نمایش داده نشده اند. تکیه گاههای غلتکی دارای راستای دلخواه بوده و شرایط تکیه گاهی لبه های ورق اختیاری اند. البته در بسیاری از کاربردهای عملی دو لبه موازی راستای حرکت آزاد بوده و دو لبه واقع بر روی غلتک به صورت تکیه گاه ساده فرض می شوند.

$$[M] = \int_A \rho h \langle \Phi \rangle^T \langle \Phi \rangle dA \quad (13)$$

$$[K_g^m] = \int_A \rho h v^2 \langle \Phi \rangle_{,x}^T \langle \Phi \rangle_{,x} dA \quad (14)$$

$$[G] = \int_A \rho h v \left( \langle \Phi \rangle^T \langle \Phi \rangle_{,x} - \langle \Phi \rangle_{,x}^T \langle \Phi \rangle \right) dA \quad (15)$$

بدین ترتیب با جاگذاری معادلات (۸) و (۱۲) در معادله (۲)، می‌توان به شکل ماتریسی معادلات حرکت جزء ورق دارای سرعت محوری دست یافت

$$[M] \{\ddot{d}\} + [G] \{\dot{d}\} + [K] \{d\} = \{0\} \quad (16)$$

به طوری که ماتریس سختی کل  $[K]$  عبارت است از

$$[K] = [K_b] + [K_g^s] - [K_g^m] \quad (17)$$

با سرهم بستن ماتریسهای  $[M]$ ،  $[G]$  و  $[K]$  و بردار  $\{d\}$  مربوط به اجزای مختلف و کاهش درجات آزادی مقید، معادله حرکت سیستم مشابه معادله (۱۶) به دست می‌آید که البته ماتریسها و بردارهای آن، تمام درجات آزادی نامقید سیستم را شامل می‌شوند.

برای استخراج خصوصیات ارتعاشی و پایداری ورق در حال حرکت، بردار تغییر مکان گرهی تابع زمان به صورت زیر فرض می‌شود

$$\{d\} = \{\hat{d}\} e^{\lambda t} \quad (18)$$

$$\lambda = \sigma + i\omega$$

که در آن  $\lambda$  یک عدد مختلط بوده و  $\sigma$  و  $\omega$  بخشهای حقیقی و موهومی مقادیر ویژه  $\lambda$  هستند. با کاربرد معادله (۱۸) در معادله (۱۶) داریم

$$\lambda^2 [M] \{\hat{d}\} + \lambda [G] \{\hat{d}\} + [K] \{\hat{d}\} = \{0\} \quad (19)$$

یا

$$\lambda [A] \{\delta\} + [A] \{\delta\} = \{0\} \quad (20)$$

به طوری که

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \lambda \{\hat{d}\} \\ \{\hat{d}\} \end{Bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} [G] & [K] \\ -[K] & [0] \end{bmatrix}$$

در مسأله مقادیر ویژه، معادله (۲۰)، ماتریس  $[A]$  یک ماتریس متقارن و  $[A]$  پاد متقارن است. مقادیر  $\lambda$  که در حالت کلی مختلط بوده، با استفاده از یک برنامه حل مقادیر ویژه نامتقارن

$\{\varepsilon\}$  بردار کرنش و  $\{\sigma\}$  بردار تنش متوجه برای تغییر شکلهای خمشی ورق نازک به صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\{\varepsilon\} = \{-w_{,xx}, -w_{,yy}, -2w_{,xy}\}^T = [B] \{d\} \quad (4)$$

$$\{\sigma\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T = [D] \{\varepsilon\}$$

به طوری که  $[B]$  ماتریس تبدیل جابه‌جاییهای گرهی به کرنش است که با استفاده از معادله (۱) مطابق زیر به دست می‌آید

$$[B] = \begin{bmatrix} -\langle \Phi \rangle_{,xx} \\ -\langle \Phi \rangle_{,yy} \\ -2\langle \Phi \rangle_{,xy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

و همچنین  $[D]$  عبارت است از

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

با قراردادن معادلات (۴) و (۵) در معادله (۳) و بهره‌گیری از توابع درونیابی  $w$  از معادله (۱) می‌توان نوشت

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T ([K_b] + [K_g^s]) \{d\} \quad (8)$$

که در آن به ترتیب  $[K_b]$  ماتریس سختی خمشی جزء و  $[K_g^s]$  ماتریس پایداری یک جزء ورق بدون حرکت محوری است:

$$[K_b] = \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (9)$$

$$[K_g^s] = \int_A \left( N_x \langle \Phi \rangle_{,x}^T + N_y \langle \Phi \rangle_{,y}^T \langle \Phi \rangle_{,y} + 2N_{xy} \langle \Phi \rangle_{,x}^T \langle \Phi \rangle_{,y} \right) dA \quad (10)$$

انرژی جنبشی ورق مرتعش در حال حرکت محوری  $T$  برای هر جزء ورق بدین صورت قابل بیان است

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho h [v^2 + (w_{,t} + v w_{,x})^2] dA \\ = \frac{1}{2} \int_A \rho h (w_{,t}^2 + v^2 w_{,x}^2 + 2v w_{,x} w_{,t} + v^2) dA \quad (11)$$

با محاسبه تغییرات  $T$  و انتگرالگیری در حوزه زمان و به کارگیری تابع تغییر مکان  $w$  از معادله (۱)، خواهیم داشت

$$\int_{t_i}^{t_f} \delta T dt = - \int_{t_i}^{t_f} \{\delta d\}^T [M] \{\dot{d}\} dt \\ + \int_{t_i}^{t_f} \{\delta d\}^T [K_g^m] \{d\} dt - \int_{t_i}^{t_f} \{\delta d\}^T [G] \{\dot{d}\} dt \quad (12)$$

که در آن  $[M]$  ماتریس جرم جزء،  $[K_g^m]$  ماتریس پایداری دینامیکی و  $[G]$  ماتریس ژيروسکوپیک به شرح زیر هستند

قابل دستیابی اند. تا زمانی که تمام مقادیر  $\lambda$  موهومی هستند  $(\lambda = i\omega)$ ، ورق در حال حرکت پایدار بوده و مقادیر  $\omega$  فرکانسهای طبیعی نوسان آزاد ورق اند. با افزایش سرعت حرکت محوری، فرکانسهای طبیعی ورق کاهش یافته و نهایتاً در سرعت بحرانی،  $v_{cr}$ ، اولین فرکانس طبیعی ورق صفر می شود و ورق ممکن است ناپایداری واگرا یا فلوتر را تجربه کند که در شرایط ناپایداری حداقل یکی از مقادیر ویژه دارای بخش حقیقی خواهد بود  $(\sigma \neq 0)$ .

فرمولسازی بسط داده شده در فوق، مستقل از نوع جزء انتخابی، توابع شکل و درجه آنهاست. در مطالعه حاضر برای استخراج نتایج عددی به روش اجزای محدود استاندارد، یک جزء چهارضلعی ایزوپارامتریک با تابع درونیابی چندجمله‌ای لاگرانژ، توسعه داده می شود، شکل (۱-ب). برای هر گره از جزء، یک درجه آزادی تغییر مکان جانبی گره منظور می شود، در نتیجه برای این جزء، پیوستگی از نوع  $C^0$  است. توابع لاگرانژ که در این جزء ایزوپارامتریک به عنوان توابع شکل در معادله (۱) و همچنین توابع مختصات مورد استفاده قرار می گیرند، به صورت زیر قابل بیان اند

$$\Phi_n = \frac{\prod_{r=1}^{p \neq i} (\xi_i - \xi_p)}{\prod_{p=1}^{r} (\xi_i - \xi_p)} \times \frac{\prod_{s=1}^{q \neq j} (\eta_j - \eta_q)}{\prod_{q=1}^{s} (\eta_j - \eta_q)}, \quad \begin{matrix} -1 \leq \xi_i \leq 1 & 1 \leq i \leq r \\ -1 \leq \eta_j \leq 1 & 1 \leq j \leq s \end{matrix}$$

$$\rightarrow 1 \leq n \leq r \times s \quad (21)$$

$\xi_i$  و  $\eta_j$  بیانگر مختصات طبیعی هر نقطه از جزء،  $i$  و  $j$  مختصات طبیعی نقاط گرهی جزء  $r$  و  $s$  مرتبه تابع لاگرانژ به ترتیب در راستای  $\xi_i$  و  $\eta_j$  هستند. از آنجا که توابع شکل در مختصات طبیعی بیان می شوند، مشتقها و انتگرالها که در معادلات مختلف این بخش به کار می روند با استفاده از جاکوبین مختصات تعیین می شوند.

### ۳- اجزای محدود طیفی

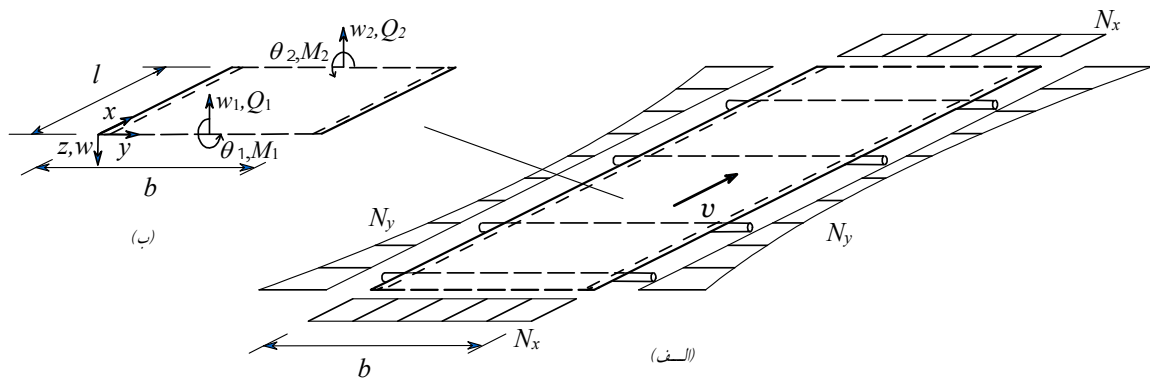
شکل (۲-الف) یک ورق مستطیلی ممتد را که بر روی چند

غلطک بدون اصطکاک در حال حرکت محوری است و تحت اثر نیروهای درون صفحه قرار دارد، نشان می دهد. غلتکها عمود بر راستای حرکت قرار گرفته اند و نیروی محوری  $N_x$  در عرض ورق یکنواخت است. در نظر است با روش اجزای محدود طیفی، در حالی که ورق در راستای طولی دارای تکیه گاههای ساده است، مسئله پایداری و ارتعاش آن حل شود. تغییر شکل هر جزء ورق در هنگام کمناش یا ارتعاش در راستای عمود بر حرکت، با توجه به شرایط تکیه گاهی، به صورت نیم طول موجهای سینوسی ارائه و در راستای دیگر با حل معادله دیفرانسیل حرکت ورق به دست می آید. در مورد صفحه در حال حرکت می توان هر بخش از ورق را، که مابین تکیه گاههای اطراف یا غلتکها قرار دارد، به عنوان یک جزء ورق در نظر گرفت. به عنوان مثال در شکل (۲-الف)، ورق در حال حرکت به پنج جزء قابل تقسیم است. در نظر است تا ماتریس سختی دقیق هر جزء ورق استخراج شده و با سرهم بستن ماتریسهای سختی اجزای مختلف سیستم، ماتریس سختی کل حاصل شود. برای استخراج ماتریس سختی دقیق برای یک جزء از ورق که در شکل (۲-ب) نشان داده شده، معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق در حال حرکت مورد نیاز است که چنین بیان می شود [۱۰]:

$$D \nabla^4 w - N_x w_{,xx} - N_y w_{,yy} + \rho h (w_{,tt} + 2v w_{,xt} + v^2 w_{,xx}) = 0 \quad (22)$$

به طوریکه  $w$  تغییر مکان جانبی ورق،  $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$  صلبیت خمشی ورق،  $N_x$ ،  $N_y$  نیروهای درون-صفحه در واحد طول به ترتیب در جهات  $x$  و  $y$  (در حالت کششی مثبت)،  $E$  مدول الاستیسیته،  $\nu$  ضریب پواسون،  $h$  ضخامت و  $\rho$  جرم حجمی ورق است.

با توجه به ساده بودن تکیه گاهها در امتداد  $x$  و تقارن بارگذاری در راستای عرضی، تغییر شکل جانبی در حین نوسان یا کمناش در راستای محور  $y$  به صورت سینوسی خواهد بود که در نتیجه نیروهای لبه جزء  $(M_2, Q_2, M_1, Q_1)$  نیز که تابع تغییر مکان جانبی اند، به صورت نیم موجهای سینوسی در



شکل ۲- الف) یک ورق ممتد در حال حرکت با غلتکهای عمود بر راستای حرکت ب) یک جزء از این ورق که مابین مرزهای خارجی و یا غلتکها قرار می گیرد

می شود. در حالت اخیر جواب عمومی معادله فوق به صورت زیر قابل ارائه است:

$$W_n(x) = \sum_{m=1}^4 A_{mn} e^{r_{mn}x} \quad (25)$$

به طوری که  $A_{mn}$  ضرایب ثابت جواب عمومی معادله بوده که از اعمال شرایط مرزی در لبه های  $x=0$  و  $x=l$  به دست می آید. عدد موج در راستای  $x$  بوده که با قرار دادن معادله (۲۵) در معادله دیفرانسیل (۲۴) و حل معادله زیر به دست می آید

$$r_{mn}^4 + \left( \frac{\rho h v^2 - N_x}{D} - 2k_n^2 \right) r_{mn}^2 + \left( \frac{2\rho h \lambda v}{D} \right) r_{mn} + \left( \frac{\rho h \lambda^2 + k_n^2 N_y}{D} + k_n^4 \right) = 0 \quad (26)$$

این معادله به ازای هر مود  $n$  چهار ریشه داشته (به ازای  $m$  از ۱ تا ۴) که در حالت کلی مختلط اند. روشن است که برای جزء ورق نشان داده شده در شکل (۲-ب)، شرایط مرزی در  $y=0$  و  $y=b$  با حوزه تغییر مکان تعریف شده در معادله (۲۵)، ارضا می شود به گونه ای که در این دو مرز تغییر مکان جانبی ( $w$ ) و لنگر خمشی بر واحد طول راستای  $x$  ( $M_y$ ) صفر می شوند. شرایط مرزی در دو لبه دیگر به گونه ای که در شکل نشان داده شده به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\text{at } x=0: \quad w = -w_1, \quad Q_x = Q_1; \quad w_{,x} = -\theta_1, \quad M_x = -M_1 \quad (27)$$

$$\text{at } x=l: \quad w = -w_2, \quad Q_x = -Q_2; \quad w_{,x} = -\theta_2, \quad M_x = M_2 \quad (28)$$

راستای  $y$  تغییر می کنند. بدین ترتیب مسئله دوبعدی ورق می تواند به یک مسئله یک بعدی در راستای  $x$  تبدیل شود. برای این منظور، تابع تغییر شکل جانبی ورق در حین ارتعاش به صورت زیر ارائه می شود:

$$w(x, y, t) = W_n(x) (e^{ik_n y} - e^{-ik_n y}) e^{\lambda t} \quad (23)$$

$$k_n = n\pi / b \quad (n=1, 2)$$

که  $\lambda$  یک عدد مختلط،  $k_n$  عدد موج در راستای  $y$  مربوط به  $n$  امین شکل مودی در راستای  $y$ ، و  $W_n(x)$  بیانگر تابع تغییر شکل در راستای  $x$  است که از حل معادله دیفرانسیل حرکت، به ازای هر مود  $n$  قابل محاسبه است. با قرار دادن  $w$  از معادله (۲۳) در معادله دیفرانسیل سه متغیره (۲۲)، این معادله به یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب مختلط تبدیل می شود:

$$DW_{n,xxxx} + (\rho h v^2 - N_x - 2Dk_n^2) W_{n,xx} + 2\rho h \lambda v W_{n,x} + (\rho h \lambda^2 + k_n^2 N_y + Dk_n^4) W_n = 0 \quad (24)$$

با حل معادله فوق، تابع  $W_n(x)$  حاصل می شود. هرگاه  $N_y$  تابعی از  $x$  باشد، به دلیل ضریب متغیر  $W_n$  در معادله، حل آن تنها به کمک روشهای عددی همچون روش رونگ-کوتا امکان پذیر است. اما اگر  $N_y$  در راستای  $x$  ثابت باشد، معادله (۲۴)، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه چهار با ضرایب ثابت خواهد بود که حل عمومی آن امکان پذیر است و منجر به دستیابی به ماتریس سختی جزء ورق با عبارات روشن پارامتری

دقیق یک ورق در حال حرکت بر روی غلتکهای موازی برای  
مود  $n$  ام ( $[S_n]$ ) به دست می آید.

تعیین فرکانسهای طبیعی، سرعت بحرانی ورق و انواع  
ناپایداری با حل معادله ویژه زیر ممکن می شود:

$$\det[S_n(\lambda)] = 0 \quad (39)$$

جملات دترمینان (39) توابع ضمنی مقادیر ویژه  $\lambda$  هستند،  
بنابراین یک روش سعی و خطا برای یافتن این مقادیر مورد نیاز  
است. مفهوم مقادیر ویژه  $\lambda$  همانند مفهوم آن در روش اجزای  
محدود استاندارد است.

#### ۴- نتایج عددی

##### ۴-۱- کلیات

برای دو روش اجزای محدود استاندارد و طیفی برنامه  
رایانه‌ای مجزا براساس فرمولسازی ارائه شده در قسمت نظری  
تهیه شده است. این برنامه‌ها قابلیت مدلسازی شرایط مختلف  
ورقهای متحرک از نظر هندسه ورق، شرایط مرزی و نیروهای  
غشایی را در محدوده نظری توسعه یافته دارا هستند. در بخش  
نتایج عددی، مثالهایی برای تأیید صحت و کارایی دو روش در  
تحلیل پایداری و ارتعاش ورقهای در حال حرکت ارائه می شود.  
برای حل مثالها به روش اجزای محدود استاندارد، کل سطح  
ورق مابین تکیه گاهها تنها با یک جزء چهارضلعی  
ایزوپارامتریک تحلیل شده و به عبارت دیگر از یک سوپرالمان  
برای حل مسئله بهره گرفته می شود. تعداد درجات آزادی نامقید  
برای ورق چهارطرف ساده مساوی با  $(r-2)(s-2)$  و برای دو  
لبه ساده و دو لبه آزاد مساوی با  $(r-2)(s)$  است. انتگرالگیرها  
با استفاده از انتگرال عددی گوس با پنج نقطه صورت می گیرد.

در روش اجزای محدود طیفی، برای محاسبه فرکانسهای طبیعی  
ورق در حال حرکت، لازم است چند مقدار ویژه اول  
معادله (39) را با روش سعی و خطا و به ازای چند مقدار  $n$   
به دست آورد (3 و 2 و 1). کوچکترین فرکانس به دست آمده  
به ازای  $n$  های مختلف، فرکانس اصلی ورق بوده و فرکانسهای  
طبیعی بعدی نیز به ترتیب کوچکی حاصل می شوند.

نیروی برشی و لنگر خمشی منتجه در واحد طول راستای  $y$   
(به ترتیب  $Q_x$  و  $M_x$ ) توسط معادلات زیر با  $w$  مرتبط اند [10]:

$$Q_x = -D[w_{,xxx} + (2-v)w_{,xyy}] + (N_x - \rho h v^2)w_{,x} - \rho h v w_{,t} \quad (29)$$

$$M_x = -D[w_{,xx} + v w_{,yy}] \quad (30)$$

که در معادله نیروی برشی  $Q_x$ ، اثر لبه‌ای کیرشلف و اثر بار درون  
صفحه  $N_x$  بر تغییر فرم لبه منظور شده است.

بردارهای تغییر مکانها و نیروهای لبه‌ای برای  $n$  امین مود  
به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\{d_n\} = \{\theta_{1n}, w_{1n}, \theta_{2n}, w_{2n}\}^T \quad (31)$$

$$\{p_n\} = \{M_{1n}, Q_{1n}, M_{2n}, Q_{2n}\}^T \quad (32)$$

با استفاده از معادلات (24) و (27) تا (32) می توان نوشت:

$$\{d_n\} = \{\bar{d}_n\} (e^{ik_n y} - e^{-ik_n y}) e^{\lambda t} \quad (33)$$

$$\{p_n\} = \{\bar{p}_n\} (e^{ik_n y} - e^{-ik_n y}) e^{\lambda t} \quad (34)$$

که در این معادلات

$$\{\bar{d}_n\} = - \sum_{m=1}^4 \left\{ \begin{matrix} r_{mn} \\ 1 \\ r_{mn} e^{r_{mn} l} \\ e^{r_{mn} l} \end{matrix} \right\} A_{mn} = [X_n]_{4 \times 4} \{A_n\}_{4 \times 1} \quad (35)$$

$$\{\bar{p}_n\} = \sum_{m=1}^4 \left\{ \begin{matrix} D(r_{mn}^2 - k_n^2 v) \\ -D[r_{mn}^3 - r_{mn} k_n^2 (2-v)] + r_{mn} (N_x - \rho h v^2) - \lambda \rho h v \\ -D(r_{mn}^2 - k_n^2 v) e^{r_{mn} l} \\ \{D[r_{mn}^3 - r_{mn} k_n^2 (2-v)] - r_{mn} (N_x - \rho h v^2) + \lambda \rho h v\} e^{r_{mn} l} \end{matrix} \right\} A_{mn} \\ = [Y_n]_{4 \times 4} \{A_n\}_{4 \times 1} \quad (36)$$

با ترکیب معادلات (35) و (36) و حذف بردار ضرایب  $\{A_n\}$   
از این معادلات داریم:

$$\{\bar{p}_n\} = [S_n] \{\bar{d}_n\} \quad (37)$$

$$[S_n] = [Y_n] [X_n]^{-1} \quad (38)$$

$[S_n]$  ماتریس سختی دقیق جزء ورق برای مود  $n$  ام است که به  
سبب وجود سرعت محوری  $v$  دارای درایه‌های مختلط است.  
با سرهم بستن ماتریس سختی اجزای مختلف سیستم در یک  
ماتریس کلی و حذف درجات آزادی بسته شده، ماتریس سختی

جدول ۱- فرکانس اصلی ارتعاش آزاد ورق ( $\Omega$ ) با تکیه‌گاههای ساده به دو روش اجزای محدود طیفی و استاندارد

Type of FEM	$a=2/1$		$a=1$		$a=1/3$	
	$c/c_{cr}=0$	$c/c_{cr}=0.5$	$c/c_{cr}=0$	$c/c_{cr}=0.5$	$c/c_{cr}=0$	$c/c_{cr}=0.5$
$k_x = k_y = 0/0$	Standard ( $r=5=+$ )	2/22027	2/19281	1/02227	-0/02225	-0/02222
	Standard ( $r=5=0$ )	2/02210	2/12220	1/00012	-0/02210	-0/02212
	Standard ( $r=5=+$ )	2/02210	2/02207	1/00012	-0/02212	-0/02210
	Spectral	2/02202	2/02211	1/00000	-0/02207	-0/02200
$k_x = 2/0, k_y = 0/0$	Standard ( $r=5=+$ )	2/02220	2/02220	1/02222	1/02222	-0/02222
	Spectral	2/02227	2/02220	1/02221	1/02227	-0/02221
$k_x = 2/0, k_y = -1/5$	Standard ( $r=5=+$ )	2/02202	2/02202	1/02202	1/02202	-0/02202
	Spectral	2/02202	2/02202	1/02202	1/02202	-0/02202

#### ۴-۲- مقایسه نتایج

برای مقایسه نتایج یک ورق مستطیلی متحرک ( $a_1=a_2=a$ ) با لبه‌های ساده در یک‌دهانه مورد تحلیل قرار می‌گیرد. فرکانس اصلی ارتعاش آزاد ورق، در حالت ایستا و حالتی که با نصف سرعت بحرانی در حال حرکت است برای سه حالت نیروهای غشایی و سه نسبت  $a$  در جدول (۱) درج شده‌اند. این مقادیر به دو روش اجزای محدود استاندارد و طیفی به‌دست آمده و باهم مقایسه شده‌اند که فرکانسهای استخراج شده از روش طیفی، مقادیر دقیق مسئله‌اند. در روش استاندارد برای شرایط بدون نیروی غشایی ( $k_x=k_y=0$ )، درجه تابع لاگرانژ سوپرالمان در دو راستا ۴، ۵ و ۶ در نظر گرفته شده تا همگرایی مطلوب این روش مشخص شود. در بقیه حالات نیروی غشایی، تابع لاگرانژ از درجه ۶ یعنی ۱۶ درجه آزادی نامقید استفاده شده است که نتایج حاصل از آن در همه موارد تطبیق بسیار خوبی با نتایج اجزای محدود طیفی نشان می‌دهد. نتایج به‌دست آمده از روش استاندارد برای ورق ایستا دقیقتر از ورق متحرک بوده که علت آن عدم تقارن مود ارتعاشی در حالتی است که سرعت محوری وجود دارد. سرعتهای بحرانی به‌کار رفته در این مثال از جدول (۲) گرفته شده است.

نتایج در این بخش به‌صورت نرمال‌شده و با تعریف پارامترهای بدون بعد زیر ارائه می‌شوند:

$$(a_1, a_2) = \frac{(L_1, L_2)}{b}, \quad (k_x, k_y) = (N_x, N_y) \times \frac{b^2}{\pi^2 D},$$

$$(c, c_{cr}) = (v, v_{cr}) \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad \Omega = \omega \frac{b^2}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (40)$$

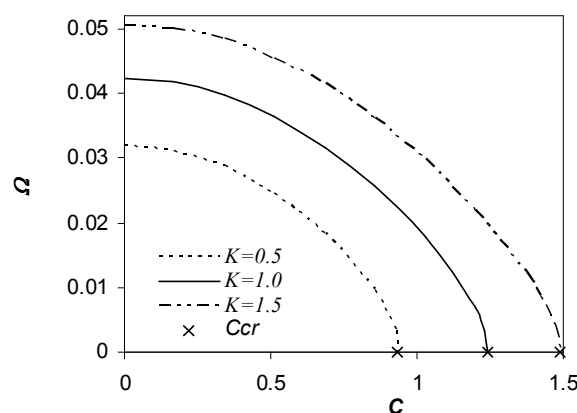
$a_1$  و  $a_2$  نسبت ابعاد ورق در دهانه مورد ارزیابی بوده،  $k_x$  و  $k_y$  پارامترهای نیروهای غشایی به‌ترتیب در راستاهای  $x$  و  $y$  هستند (با فرض کششی مثبت).  $c$ ،  $c_{cr}$  و  $\Omega$  به‌ترتیب مقادیر بی‌بعد سرعت محوری، سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی هستند. مقدار ضریب پواسون  $\nu$  برابر  $0/3$  در نظر گرفته شده است.

در ابتدای این بخش، نتایج حاصل از دو روش اجزای محدود استاندارد و طیفی با یکدیگر مقایسه می‌شوند. از آنجا که روش طیفی منجر به نتایج دقیق می‌شود، ملاک خوبی برای بررسی دقت روش استاندارد است. از طرف دیگر نزدیکی نتایج دو روش می‌تواند روش طیفی را نیز از جهت صحت تایید کند. در ادامه مثالهایی به‌طور مجزا از هر دو روش حل می‌شود تا دامنه کاربرد و کارایی هر یک در حل مثالهای عددی مشخص شود.



جدول ۲- سرعت بحرانی بی‌بعد برای ورق تک‌دهانه با تکیه‌گاههای ساده در امتداد حرکت به روش اجزای محدود طیفی

End B.C.	$a=2/10$	$a=1$	$a=10/3$
$k_x=k_y=+/-$	۲/۶۳۳۳۳	۲/۰۰۰۰۰	۲/۰۱۱۱۱
SS $k_x=+/-, k_y=+/-$	۲/۱۲۷۲۲	۲/۸۲۸۲۳	۲/۸۳۶۲۹
$k_x=+/-, k_y=-1/0$	۲/۱۳۱۱۱	۲/۵۲۹۵۱	۰/۷۳۱۰۶
$k_x=k_y=+/-$	۶/۸۱۹۹۷	۲/۵۹۶۷۷	۲/۰۷۴۰۶
CC $k_x=+/-, k_y=+/-$	۷/۱۰۷۱۸	۳/۲۷۷۶۸	۲/۸۸۱۲۷
$k_x=+/-, k_y=-1/0$	۷/۱۰۰۰۵	۳/۱۰۰۲۱۶	۱/۲۲۰۳۶



شکل ۳- فرکانس اصلی ورق متحرک با لبه‌های آزاد در امتداد حرکت و نیروی محوری سهمی. ( $a_1=2, a_2=2/6$ )

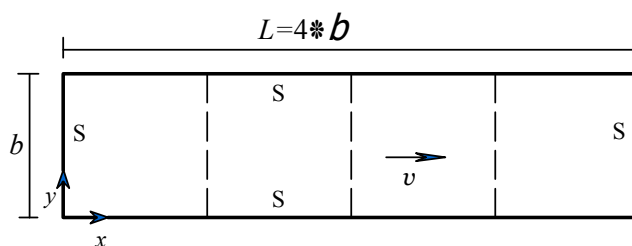
یافته و در یک سرعت بحرانی مقدار آن صفر می‌شود که در این لحظه ورق ناپایدار می‌شود. سرعت‌های بحرانی به‌ازای مقادیر مختلف نیروی کششی در شکل (۳) مشخص شده‌اند. با افزایش کشش محوری، فرکانس اصلی و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند.

#### ۴-۴- روش طیفی

در ابتدا سرعت‌های بحرانی یک ورق مستطیلی متحرک در  $(a_1=a_2=a)$  با لبه‌های ساده در راستای حرکت برای یک‌دهانه استخراج می‌شوند. جدول (۲) مقادیر سرعت‌های بحرانی بی‌بعد دقیق را که به روش اجزای محدود طیفی به‌دست آمده، برای شرایط مرزی انتهایی ساده و گیردار، نمایش می‌دهد. نتایج برای دو انتهای ساده تنها با یک جزء ورق و برای دو انتهای گیردار با

#### ۴-۳- روش استاندارد

در این قسمت از روش اجزای محدود استاندارد برای حل ارتعاش آزاد یک ورق متحرک مطابق شکل (۱) که یکی از غلتکها مورب بوده ( $a_1=2$  و  $a_2=2/6$ ) و نیروی کششی  $N_x$  از درجه ۲ در عرض ورق اثر می‌کند، بهره گرفته می‌شود. لبه‌های ورق در راستای طولی آزاد بوده و لبه‌های واقع بر غلتکها ساده‌اند. کمینه نیروی کششی نرمال شده ( $k_x$ ) در وسط برابر با  $K$  و بیشینه آن در دو طرف مساوی  $2K$  است؛  $k_x = K(1 + \eta^2)$ . شکل (۳) فرکانس اصلی بی‌بعد ورق را برحسب سرعت محوری آن نمایش می‌دهد. در این مثال  $\tau$  برابر با  $\gamma$  و  $s$  مساوی ۳ اتخاذ شده‌اند که در نتیجه ۱۵ درجه آزادی نامقید وجود خواهد داشت. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، فرکانس اصلی با افزایش سرعت محوری کاهش



شکل ۴- ورق چهاردهانه دارای حرکت محوری با تکیه‌گاههای پیرامونی ساده

جدول ۳- فرکانسهای بی‌بعد ارتعاش آزاد برای ورق چهاردهانه با تکیه‌گاههای پیرامونی ساده به روش اجزای محدود طیفی

$c^T$	$k_x$	$k_y$	Mode					
			۱	۲	۳	۴	۵	۶
-/۰	-/۰	-/۰	۱/۰۰۰۰۰ (n=۱)	۱/۰۰۰۰۰ (n=۱)	۱/۱۹۷۹۲ (n=۱)	۱/۳۷۲۹۳ (n=۱)	۲/۵۰۰۰۰ (n=۱)	۲/۵۰۰۰۰ (n=۲)
۲/۰	-/۰	-/۰	+۰۰۰۰۰ (n=۱)	+۰۰۰۰۰ (n=۱)	+۰۳۷۴۱۱ (n=۱)	+۰۶۰۲۶۵ (n=۱)	۱/۶۷۲۷۴ (n=۱)	۱/۸۵۵۹۲ (n=۱)
۲/۰	۲/۰	-۲/۰	+۰۶۲۵۹۴ (n=۱)	+۰۶۹۵۱۶ (n=۱)	+۰۸۶۷۷۵ (n=۱)	۱/۰۶۶۴۷ (n=۱)	۱/۹۲۳۳۶ (n=۲)	۱/۹۶۱۴۱ (n=۲)

غشایی با سرعت محوری نرمال شده  $\nu$  ( $c=2$ ) است. از آنجایی که در این سرعت مقدار اولین فرکانس طبیعی صفر است، این سرعت همان سرعت بحرانی ورق محسوب می‌شود. در ردیف سوم، فرکانسهای طبیعی ورق متحرک با نیروی کششی در راستای حرکت و نیروی فشاری در راستای عمود بر حرکت، نمایش داده شده است.

### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله دو روش برای حل ارتعاش و پایداری ورقهای ممتد در حال حرکت محوری توسعه داده شدند. یکی اجزای محدود استاندارد که مبتنی بر انرژی است و فرمولسازی آن به کمک اصل هامیلتون استخراج شد و دیگری اجزای محدود طیفی که بر اساس حل معادله دیفرانسیل ورق به دست می‌آید. روش استاندارد، دامنه کاربرد وسیعتری داشته و می‌تواند شرایط مرزی مختلف ورق و نیروهای غشایی نرمال و برشی نایکنواخت را

دو جزء ورق به دست می‌آیند. مقادیر سرعتهای بحرانی برای نسبتهای طول به عرض مختلف و نیروهای غشایی متفاوت استخراج شده‌اند.

در ادامه برای اثبات قابلیت روش اجزای محدود طیفی در تحلیل ورقهای دارای حرکت در چنددهانه، ارتعاش آزاد یک ورق چهاردهانه مطابق شکل (۴) بررسی می‌شود. تکیه‌گاههای پیرامونی به صورت ساده بوده و غلتکهای میانی عمود بر راستای حرکت‌اند. جدول (۳) فرکانسهای طبیعی بی‌بعد مربوط به شش مود اول ارتعاش آزاد این ورق را نشان می‌دهد و مقدار  $n$  تعداد نیم‌موجهای سینوسی در عرض ورق است. تحلیل دقیق ارتعاش این ورق به روش اجزای محدود طیفی، تنها با چهار جزء ورق امکانپذیر است. ردیف اول نتایج مربوط به ورق ایستا بدون نیروی غشایی است. برای این حالت مقدار دقیق فرکانس بی‌بعد اول برابر ۱ و مقدار دقیق فرکانسهای بی‌بعد پنجم و ششم برابر ۲/۵ هستند. ردیف دوم مربوط به ورق متحرک بدون نیروی

جبری از متغیرهای مسئله همچون، مقادیر ویژه ارتعاش، سرعت محوری، نیروهای غشایی و خصوصیات هندسی و مصالح ورق، هستند. در نتیجه در این روش مقادیر فرکانسهای طبیعی و سرعت بحرانی دقیق قابل حصول اند. این مقادیر دقیق می توانند به عنوان مبنایی برای تعیین دقت روشهای عددی دیگر مورد استفاده واقع شوند. روش طیفی برای بررسی مودهای ارتعاشی بالاتر و بررسی اثر چند دهانه متوالی بر یکدیگر بسیار مؤثر است.

در نظر بگیرد اما برای استخراج نتایج با دقت زیاد به خصوص برای مودهای بالاتر مستلزم انتخاب درجات آزادی زیاد و در نتیجه هزینه حل بالاست. از طرفی روش طیفی محدود به شرایطی است که لبه های ورق در امتداد حرکت به صورت تکیه گاه ساده بوده و نیروی غشایی در عرض ورق یکنواخت باشد. اما با این روش می توان به ماتریس سختی دقیق ورق در حال حرکت محوری دست یافت که درایه های این ماتریس عبارات روشن

## مراجع

1. Wickert, J.A., and Mote Jr, C.D., "Classical Vibration Analysis of Axially Moving Continua," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 738-744, 1990.
2. Sack, R.A., "Transverse Oscillations in Traveling Strings," *British Journal of Applied physics*, Vol. 5, pp. 224-226, 1954.
3. Mote Jr, C.D., "On the Nonlinear Oscillation of an Axially Moving String," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 463-464, 1966.
4. Chen, L.Q., and Zhao, W.J., Zu, W., "Simulations of Transverse Vibrations of an Axially Moving String: a Modified Difference Approach," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 166, No. 3, pp. 596-607, 2005.
5. Thurman, A.L., and Mote Jr, C.D., "Free, Periodic, Nonlinear Oscillation of an Axially Moving Strip," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, pp. 83-91, 1969.
6. Chonan, S., "Steady State Response of an Axially Moving Strip Subjected to a Stationary Lateral Load," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 107, pp. 155-165, 1986.
7. Sreeram, T.R., and Sivaneri, N.T., "FE-Analysis of a Moving Beam Using Lagrangian Multiplier Method," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, pp. 3675-3694, 1998.
8. Oz, H.R., Pakdemirli, M., and Boyaci, H., "Non-Linear Vibrations and Stability of an Axially Moving Beam with Time-Dependent Velocity," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 36, pp. 107-115, 2001.
9. Chen, L.Q., and Zhao, W.J., "A Conserved Quantity and the Stability of Axially Moving Nonlinear Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 286, No. 3, pp. 663-668, 2005.
10. Lengoc, L., and Mccallion, H., "Wide Bandsaw Blade under Cutting Conditions, part I: Vibration of a Plate Moving in its Plane while Subjected to Tangential Edge Loading," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, No.1, pp. 125-142, 1995.
11. Lin, C.C., "Stability and Vibration Characteristics of Axially Moving Plates," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 24, pp. 3179-3190, 1997.
12. Luo, A.C.J., and Hamidzadeh, H.R., "Equilibrium and Buckling Stability for Axially Traveling Plates," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 9, pp. 343-360, 2004.
13. Finnveden, S., "Spectral Finite Element Analysis of Stationary Vibrations in a Beam-Plate Structure," *Acta Acustica*, Vol. 82, No. 3, pp.478-497, 1996.
14. Birgersson, F., Ferguson, N.S., and Finnveden, S., "Application of the Spectral Finite Element Method to Turbulent Boundary Layer Induced Vibration of Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 4, pp. 873-891, 2003.
15. Chakraborty, A., and Gopalakrishnan, S., "A Spectrally Formulated Finite Element for Wave Propagation Analysis in Functionally Graded Beams," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 2421-2448, 2003.
16. Ostoja-Starzewski, M., and Woods, A., "Spectral Finite Elements for Vibrating Rods and Beams with Random Field Properties," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 268, No. 4, pp. 779-797, 2003.
17. Krawczuk, M., "Application of Spectral Beam Finite Element with a Crack and Iterative Search Technique for Damage Detection," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 38, pp. 537-548, 2002.
18. Doyle, J.F., *Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Fourier Transforms*, 2nd Ed., Springer, Berlin, 1997.
19. Lee, U., and Lee, J., "Spectral-Element Method for Levy-Type Plates Subjected to Dynamic Loads," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 2, pp. 243-247, 1999.